제 1차 (오전)

1. 2×2 행렬 $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$에 대하여, 행렬 $e^A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}$ 을 구하라

[풀이] $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 이라 하면 $B^2=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=-I, B^3=-B, B^4=I$ 가 성립하므로

$A=\begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}=xB$ 라 놓으면, $A^2=(-x^2)I, A^3=(-x^3)B, A^4=x^4I,\ A^5=(x^5)B\ \ldots$

이다. 그러므로 $e^A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}=I+A+\frac{A^2}{2!}+\cdots+\frac{A^n}{n!}+\cdots$

$$=I+xB+\frac{(-x^2)I}{2!}+\frac{(-x^3)B}{3!}+\frac{x^4I}{4!}+\frac{(x^5)B}{5!}+\frac{(-x^6)I}{6!}+\cdots$$

$$=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)I+\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right)B$$

$$=(\cos x)I+(\sin x)B=\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$$ 가 된다.

그러므로 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 를 대입하면 행렬 $e^A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}=\begin{pmatrix} \cos\frac{\sqrt{2}}{2} & \sin\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\sin\frac{\sqrt{2}}{2} & \cos\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$을 얻는다.

제 1차 (오전)

2. 미분방정식 $y'(t)+2ty(t)=ty(t)^2, y(1)=1$의 해를 구하라

[풀이] $y(t)=v(t)^k$ 으로 치환하자. $y'=kv^{k-1}\cdot v'$이므로 준 식은 $kv^{k-1}\cdot v'+2tv^k = tv^{2k}$,

즉 $kv'+2tv = tv^{k+1}$ 이 된다. $k=-1$로 놓으면 이 방정식 $-v'+2tv = t$ 은 1차

선형방정식이 되므로 $-e^{-t^2}$을 양변에 곱하고 정리하면 $(e^{-t^2}\cdot v)'=-te^{-t^2}$ 이 되므로

$e^{-t^2}\cdot v=-\int te^{-t^2}dt=\frac{e^{-t^2}}{2}+C$ 을 얻게 되어 $v(t)=\frac{1}{2}+Ce^{t^2}$가 된다. 그러므로,

$y(t)=v(t)^{-1}=\left(\frac{1}{2}+Ce^{t^2}\right)^{-1}$가 성립하고, $y(1)=1$ 로부터 $C=\frac{1}{2e}$을 얻는다.

그러므로 위 방정식의 해는 $y(t)=\left(\frac{1}{2}+\frac{e^{t^2}}{2e}\right)^{-1}=\frac{2e}{e+e^{t^2}}$ 이다.

제 1차 (오전)

3. 임의로 주어진 소수 $p \ge 3$ 에 대하여 집합 $Z_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ 를 생각하자.

이때 집합 $S = \{(x, y) \mid x, y \in Z_p, x^2 + y^2 \equiv -1 (\operatorname{mod} p)\}$ 는 공집합이 아님을 보여라.

[풀이] (포함-배제 원리 이용)

아래의 모든 계산은 $\operatorname{mod} p$ 계산을 하기로 한다.

Z_p 에서 $0^2, 1^2, 2^2, \ldots, \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor^2$ 은 서로 다른 제곱수이다.

두 집합 A, B 를 아래와 같이 정의하자

$A = \{x^2 \in Z_p : x \in Z_p\}, B = \{-(1+y^2) \in Z_p : y \in Z_p\}$

그러면 $A \ge 1 + \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$, $B \ge 1 + \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$ 가 자명하게 성립한다.

$A \bigcup B \subset Z_p$ 이고 또 $|A| + |B| \ge 2\left(1 + \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor\right) = 1 + \left(1 + 2\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor\right) \ge 1 + p > |Z_p|$ 이 되므로

포함-배제 원리에 의해서 $A \bigcap B \ne \phi$ 이다.

$x \in A \bigcap B$ 라 하면 적당한 $y \in Z_p$ 에 대하여 $x^2 = -(1+y^2)[\operatorname{mod} p]$ 가 되므로

$S = \{(x, y) \mid x, y \in Z_p, x^2 + y^2 \equiv -1 (\operatorname{mod} p)\}$ 는 공집합이 아니다.

제 1차 (오전)

4. 미분 가능한 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 가 음이 아닌 모든 정수 n에 대하여 $|f(n)|\le \dfrac{1}{(1+n)^{5/4}}$ 을 만족시키고, 모든 실수 x에 대하여 $|f'(x)|\le e^{-x}$ 을 만족시킬 때 $\int_0^\infty |f(x)|dx<\infty$ 임을 보여라.

[풀이] (f' 이 연속함수인 경우)

먼저 $n\le x\le n+1$ 이라 하자. 문제의 조건 $|f'(x)|\le e^{-x}$ 으로부터

$\int_n^x -e^{-t}dt \le \int_n^x f'(t)dt \le \int_n^x e^{-t}dt$ 라 쓸 수 있고, 이를 적분하여 f 에 관하여 정리하면

$e^{-x}-e^{-n}+f(n)\le f(x)\le -e^{-x}+e^{-n}+f(n)$ 이 되고 여기에 조건 $|f(n)|\le\dfrac{1}{(1+n)^{5/4}}$ 을

적용하면 $e^{-x}-e^{-n}-\dfrac{1}{(1+n)^{5/4}}\le f(x)\le -e^{-x}+e^{-n}+\dfrac{1}{(1+n)^{5/4}}$ 이 성립한다. 따라서

$\left|f(x)\right|\le\left|-e^{-x}+e^{-n}+\dfrac{1}{(1+n)^{5/4}}\right|=-e^{-x}+e^{-n}+\dfrac{1}{(1+n)^{5/4}}$ 이 성립하고 이로부터

$\int_n^{n+1}\left|f(x)\right|dx\le\int_n^{n+1}\left(-e^{-x}+e^{-n}+\dfrac{1}{(1+n)^{5/4}}\right)dx=e^{-n-1}+\dfrac{1}{(1+n)^{5/4}}$ 을 얻는다.

그러므로 $\int_0^\infty\left|f(x)\right|dx\le\sum_{n=0}^\infty\int_n^{n+1}\left|f(x)\right|dx\le\sum_{n=0}^\infty e^{-n-1}+\sum_{n=0}^\infty\dfrac{1}{(1+n)^{5/4}}<\infty$ 가 성립한다.

[별해] (일반적인 f'의 경우)

$n\le x\le n+1$ 이라 하자. 이 때, Taylor의 정리에 의하여 $t\in(n,x)$가 존재하여

$f(x)=f(n)+f'(t)(x-n)$ 이 성립한다. 그러므로

$|f(x)|\le|f(n)|+|f'(t)|\le\dfrac{1}{(1+n)^{5/4}}+e^{-n}$ 이 성립하여서

$\int_0^\infty\left|f(x)\right|dx\le\sum_{n=0}^\infty\int_n^{n+1}\left|f(x)\right|dx\le\sum_{n=0}^\infty e^{-n}+\sum_{n=0}^\infty\dfrac{1}{(1+n)^{5/4}}<\infty$ 이 성립한다

제 1차 (오전)

5. 집합 $\{1,2,3,\ldots,n\}$ 위에서 정의된 1:1 대응사상 전체의 집합을 S_n 이라고 하자.

S_n 의 임의의 원소 σ 에 대하여 $f(\sigma)$ 를 σ 의 고정점의 개수, 즉 $f(\sigma)$ 는 집합 $\{\sigma(x)=x \mid x=1,2,\ldots,n\}$ 의 원소의 개수라 정의할 때 $\sum_{\sigma\in S_n} f(\sigma)$ 의 값을 구하라.

[풀이]

각각의 k 에 대해서, k 를 고정하는 S_n 의 원소의 개수는 $(n-1)!$ 이다.

즉, 1을 고정하는 S_n 의 원소의 개수 = 2를 고정하는 S_n 의 원소의 개수
= 3을 고정하는 S_n 의 원소의 개수 = 4를 고정하는 S_n 의 원소의 개수
= ⋯ = n 을 고정하는 S_n 의 원소의 개수 = $(n-1)!$ 임을 알 수 있다.

그러므로 $\sum_{\sigma\in S_n} f(\sigma) = n\times(n-1)! = n!$ 이 된다

제 2차 (오후)

6. 담배를 피우는 사람과 피우지 않는 사람으로 구성된 집단에서, 매년 담배를 피우지 않는 사람의 5%가 담배를 피우고, 담배를 피우는 사람의 10%가 담배를 끊는다면 아주 오랜 시간이 흐른 후에 담배를 피우는 사람과 피우지 않는 사람의 비율은 일정한 값에 수렴하게 됨을 보이고 그 비율을 구하라.

[풀이]

$k \geq 0$ 인 정수에 대하여

C_k = k 년 후에 담배를 피우지 않는 사람의 수

R_k = k 년 후에 담배를 피우는 사람의 수

라 놓으면 $k \geq 1$ 년 후에는 $\begin{matrix} C_k = 0.95C_{k-1} + 0.1R_{k-1} \\ R_k = 0.05C_{k-1} + 0.9R_{k-1} \end{matrix}$ 이 성립함을 얻을 수 있다.

$x_k = \begin{pmatrix} C_k \\ R_k \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.1 \\ 0.05 & 0.9 \end{pmatrix}$ 이라 놓으면 위의 식으로부터 $x_k = A^k x_0$ 가 성립하므로

행렬 A^k 의 값을 알면 k 년 후에 담배를 피우는 사람과 피우지 않는 사람의 비율을 알 수 있다. 행렬 A 를 고유값과 고유벡터를 사용하여 대각화 하면

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 17/20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ 가 되고 이로부터

$A^k = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (17/20)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ 를 얻고, 또한 $k \to \infty$ 일 때 $(17/20)^k \to 0$

이므로 k 의 값이 아주 클 때, 행렬 행렬 A^k 는 근사적으로 $\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ 값을 갖게 된다.

그러므로 $x_k \doteq \left(C_0 + R_0\right)\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$을 얻게 되어서, 초기 사람수에 관계없이 아주 오랜 시간이 지나면 담배를 피우는 사람과 피우지 않는 사람의 비율은 1:2 에 수렴하게 된다.

제 2차 (오후)

7. 미분 가능한 함수 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 가 $f(0)=0, f(1)=1$ 일 때, 임의의 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f'(x_k)}=n$ 을 만족시키는 서로 다른 점 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 이 구간 $[0,1]$ 내에 존재함을 보여라. (제 1 분야 문제)

[풀이]

(i) $n=1$ 일 때: 평균값정리에 의하여 $f'(x_1)=1$을 만족시키는 $x_1\in[0,1]$이 존재한다

(ii) 임의의 자연수 n에 대하여: $c_0=0, c_n=1$이라 정의하고, $0\le i\le n$에 대하여 c_i를 $f(c_i)=\frac{i}{n}$ 이 성립하는 $[0,1]$에서 가장 작은 수라고 한다. (중간값정리 사용)

이 때 $c_0<c_1<c_2<\cdots<c_{n-1}<1$ 을 만족하고, 각 구간 $\left(c_{i-1},c_i\right)$,$1\le i\le n$ 에 대하여 $f'(x_i)=\frac{f(c_i)-f(c_{i-1})}{c_i-c_{i-1}}$ 이 되는 $x_i\in\left(c_{i-1},c_i\right)$를 선택한다. 이 때 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 은 구간 $[0,1]$ 의 서로 다른 점이고, 또한 $f'(x_i)=\frac{\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n}}{c_i-c_{i-1}}=\frac{1}{n(c_i-c_{i-1})}$ 이 성립하므로

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f\,'(x_k)} = \sum_{k=1}^{\infty} n(c_k - c_{k-1}) \ = n$ 을 만족시킨다.

제 2차 (오후)

7. 역행렬을 갖는 2×2 행렬 전체의 집합을 X 라 하고, 역행렬을 갖는 3×3 행렬 전체의 집합을 Υ 라 할 때, 함수 $\Phi : \mathrm{X} \to \Upsilon$ 를 $\Phi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ ac & ad+bc & bd \\ c^2 & 2cd & d^2 \end{bmatrix}$ 으로 정의하자. 행렬 $A \in \mathrm{X}$ 는 $1, x$를 고유값으로 갖고, 행렬 $B \in \mathrm{X}$ 는 $1+x, 1-x$ 를 고유값으로 갖는다고 가정할 때 $\det\left[\Phi(AB)\right]$를 구하라. (제 2 분야)

[풀이]

행렬 $\Phi(A)$ 의 특성다항식을

$f(x) = \det\left(xI - \Phi(A)\right) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ 라 놓으면, $-\gamma = \det\Phi(A)$ 를 만족한다.

행렬 $\Phi(A)$ 의 특성다항식을 직접 계산하면, $-\gamma = \left(ad - bc\right)^3 = \left(\det A\right)^3$ 을 확인 할 수 있다.

즉, $-\gamma = \left(ad - bc\right)^3 = \left(\det A\right)^3$ 을 얻는다.

즉 임의의 $A \in \mathrm{X}$ 에 대하여 $\det\Phi(A) = \left(\det A\right)^3$ 가 성립함을 알 수 있다

또한, 단순한 계산으로 $\Phi(AB)=\Phi(A)\Phi(B)$임을 확인할 수 있으므로

행렬 $A\in \mathrm{X}$ 는 $1, x$를, 행렬 $B\in \mathrm{X}$는 $1+x, 1-x$를 고유값으로 갖는다고 가정할 때

$$\det\left(\Phi(AB)\right)=\det\left(\Phi(A)\Phi(B)\right)=\det\Phi(A)\cdot\det\Phi(B)=\left(\det A\right)^3\left(\det B\right)^3=x^3(1-x^2)^3$$

가 성립한다.

제 2차 (오후)

8. 세 문자 “가, 나, 다”를 사용하여 길이가 n인 단어를 만든다고 하자.
   단, 문자 “가”를 두 번 연속하여 사용할 수 없다. 이 때 만들 수 있는 길이 n인 단어의 개수를 n에 관한 식으로 나타내라.

[풀이]

$h(n)$을 길이가 n인 단어의 개수를 나타낸다고 하자. 그러면,
$h(1)=3,\ \ h(2)=8,\ \ h(3)=2h(2)+2h(1)$으로 나타난다.

$n\geq 3$에 대하여, 첫 문자가 ‘나’ 또는 ‘다’인 경우는 그 뒤의 문자들은 $h(n-1)$가지가 된다. 그리고 첫 문자가 ‘가’인 경우는 그 다음 문자는 ‘나’ 또는 ‘다’만을 사용할 수 있고 그 이후는 위와 마찬가지로 $h(n-2)$가지가 된다.
결국 $h(n)=2h(n-1)+2h(n-2)$의 점화식을 얻게 된다

이 점화식의 특성다항식은 $x^2-2x-2=0$ 이고 두 근은 $1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}$ 이므로

$h(n)=c_1\left(1+\sqrt{3}\right)^n+c_2\left(1-\sqrt{3}\right)^n, n\geq 1$ 을 얻는다. 여기에 $h(1)=3,\ h(2)=8$을

사용하여 c_1, c_2를 구하면 $c_1=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}, c_2=\dfrac{-2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$을 얻게 된다.

그러므로 모든 자연수 n에 대해서

$h(n) = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\left(1+\sqrt{3}\right)^n + \frac{-2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\left(1-\sqrt{3}\right)^n$ 이 성립한다.

제 2차 (오후)

9. 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n > 0,\ b_n > 0$ 인 수열 $\{a_n\},\{b_n\}$ 으로 이루어진 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 4$ 을 만족시킬 때, 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^{\ 2}}{a_n + b_n}$ 이 취할 수 있는 모든 값의 상한(supremum)과 하한(infimum)을 구하라. (제 1 분야)

[풀이] 각 n에 대하여, $\frac{a_n^{\ 2}}{a_n+b_n} < \frac{a_n^{\ 2}}{a_n} = a_n$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^{\ 2}}{a_n+b_n} < \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3$가 되어서

3은 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^{\ 2}}{a_n+b_n}$ 의 상계(upper bound)가 된다. 3이 위 급수의 상한임을 보이기 위해서,

임의의 $0 < \varepsilon < 1$ 에 대하여, $a_1 = 3 - \frac{\varepsilon}{2}$,이고 $\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \frac{\varepsilon}{2}$ 인 수열 $\{a_n\}$을 택하고 수열 $\{b_n\}$

을 $\frac{a_1^{\ 2}}{a_1+b_1} = 3-\varepsilon$, 즉 $b_1 = \frac{\left(3-\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 - (3-\varepsilon)(3-\frac{\varepsilon}{2})}{3-\varepsilon}$ 가 되도록 택하면 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^{\ 2}}{a_n+b_n} > 3-\varepsilon$

가 되므로 3은 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^{\ 2}}{a_n+b_n}$ 의 상한임을 알 수 있다.

또한 코시- 슈바르츠 부등식에 의하여

$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{{a_n}^2}{a_n+b_n}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)\right)\geq\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)^2$, 즉 $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{{a_n}^2}{a_n+b_n}\right)(3+4)\geq 3^2$ 을 얻어서

$\frac{9}{7}$ 는 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{{a_n}^2}{a_n+b_n}$ 의 하계가 됨을 알 수 있다.

또한, 코시 슈바르츠의 등호가 성립하는 경우의 조건, 즉 모든 자연수 n 에 대하여

$\frac{\frac{{a_n}^2}{a_n+b_n}}{a_n+b_n}=\frac{{a_n}^2}{(a_n+b_n)^2}=c$ (상수) 즉 모든 자연수 n 에 대하여 $\frac{b_n}{a_n}=\frac{4}{3}$ 이 성립하면

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{{a_n}^2}{a_n+b_n}=\frac{9}{7}$ 가 성립하므로 $\frac{9}{7}$ 는 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{{a_n}^2}{a_n+b_n}$ 의 하한이 된다.

제 2차 (오후)

9. 두 번 미분 가능한 함수 $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ 가 모든 $x\in(0,\infty)$ 에 대하여 $|f(x)|\le 1, |f''(x)|\le 1$ 이 성립할 때, 모든 $x\in(0,\infty)$에 대하여 $|f'(x)|\le 2$ 임을 보여라.
(제 2 분야)

[풀이]

임의의 $x\in(0,\infty)$를 고정시키자.

Taylor 의 정리에 의하여 각각의 $h>0$ 에 대하여 $k\in(x,x+h)$ 가 존재해서

$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\dfrac{f''(k)}{2!}h^2$ 이 성립한다.

이로부터 $f'(x)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}-\dfrac{1}{2}hf''(k)$ 을 얻게 되고,

조건 $|f(x+h)|\le 1, |f(x)|\le 1, |f''(k)|\le 1$ 를 사용하여

$\left|f'(x)\right|\le\dfrac{|f(x+h)|+|f(x)|}{h}+\dfrac{1}{2}|f''(k)|h\le\dfrac{2}{h}+\dfrac{h}{2}$ 를 얻는다.

그러므로 $\left|f'(x)\right|\le\inf\left\{\dfrac{2}{h}+\dfrac{h}{2}:h>0\right\}=2\sqrt{\dfrac{2}{h}\cdot\dfrac{h}{2}}=2$ 가 성립한다.