제 28회 전국 대학생 수학 경시대회

풀 이

제 2 분야

1. $-1 \le x \le 1$ 일 때, 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$ 의 길이를 구하여라.

[풀이] $-1 \le x \le 1$에서의 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$의 길이는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x^2}\,dx &= 2\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx\\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\,d\theta\\ &= \left[\tan\theta\sec\theta+\ln(\tan\theta+\sec\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\\ &= \sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\end{aligned}$$

□

2. 평면에서 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ 로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하여라.

[풀이] 주어진 곡선 C: $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ 를 $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$, $0\le t\le 2\pi$ 로 매개화하면 구하는 넓이 A는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2}\int_C x\,dy-y\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^3 t\,(3\sin^2 t\cos t\,dt)-(\sin^3 t\,(-3\cos^2 t\sin t\,dt))\\ &= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,\sin^2 t\,(\cos^2 t+\sin^2 t)dt\\ &= \frac{3}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\,dt\\ &= \frac{3}{8}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4t}{2}\,dt\\ &= \frac{3}{8}\pi\,.\end{aligned}$$

□

3. 행렬 $A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 4\\ -4 & 2 & 4\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ 에 대하여 A^{2009} 의 모든 성분의 합을 구하여라.

[풀이] 고유방정식을 구하면

$$\det\begin{pmatrix} -3-x & 1 & 4 \\ -4 & 2-x & 4 \\ -1 & 1 & 2-x \end{pmatrix} = -(x-1)(x+2)(x-2)=0$$

이다. 또한 $x=2$ 일 때 고유벡터는 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x=1$ 일 때 고유벡터는 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x=-2$ 일 때 고유벡터는 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 이다. 이때, $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여

$$P^{-1}AP=\mathrm{diag}\,(2,1,-2)$$

이다. 따라서

$$A^{2009} = P\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} -2\alpha+1 & \alpha-1 & 2\alpha \\ -2\alpha & \alpha & 2\alpha \\ -\alpha+1 & \alpha-1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha=2^{2009}$$

이므로, 모든 성분의 합은 $3\alpha=3\cdot 2^{2009}$ 이다. □

4. 모든 성분이 실수인 $n\times 1$ 열벡터 x,y 는 다음 두 조건을 모두 만족시킨다.

i) $x\neq 0$ 이고 $y\neq 0$ 이다.

ii) $A=xy^T$ 는 대칭행렬이다.

이때, $A=uu^T$ 또는 $A=-uu^T$ 를 만족시키는 모든 성분이 실수인 $n\times 1$ 열벡터 u 가 존재함을 보여라. (단, y^T 는 y 의 전치(transpose)이다.)

[풀이] A가 대칭행렬이라는 가정으로부터 $A=A^T=xy^T=yx^T$ 이고

$$(1) \qquad x(y^Tx)=(xy^T)x=(yx^T)x=y\|x\|^2$$

이다. 가정에 의해 x,y 는 영벡터가 아니므로 식 (1)로부터 $y^Tx=x^Ty\neq 0$ 이다. 식 (1)의 양변을 y^Tx 로 나누면 다음 등식을 얻는다.

$$(2) \qquad x=\frac{x^Tx}{x^Ty}\,y$$

식 (2)를 $A=xy^T$ 에 대입하면

$$A=\frac{x^Tx}{x^Ty}\,yy^T$$

이다. x^Ty 가 양수이면 $u=\sqrt{\frac{x^Tx}{x^Ty}}\,y$ 라 두고, x^Ty 가 음수이면 $u=\sqrt{-\frac{x^Tx}{x^Ty}}\,y$ 라 두면 $A=uu^T$ 또는 $A=-uu^T$ 가 성립한다. □

5. 다음 세 조건을 모두 만족시키는 함수 $f: R \to R$을 모두 구하여라.

i) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) > 0$,

ii) $f'(x) - 6f(x)f'(x) - f'''(x) = 0$,

iii) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} f''(x) = 0$.

[풀이] 조건 ii)를 적분하면 조건 iii)에 의해

$$f(x) - 3f(x)^2 - f''(x) = 0$$

이다. 이 식의 양변에 $2f'(x)$를 곱하면

$$2f(x)f'(x) - 6f(x)^2 f'(x) - 2f'(x)f''(x) = 0$$

가 되고, 이 식의 양변을 적분하면 조건 ii)에 의해

$$f(x)^2 - 2f(x)^3 - f'(x)^2 = 0$$

가 된다. 따라서 $f'(x)^2 = f(x)^2(1-2f(x))$ 이다. 그러므로

$$\frac{df}{dx} = \pm f\sqrt{1-2f}$$

이다. 위 식을 변수분리하여 적분하면

$$\pm x = \int \frac{df}{f\sqrt{1-2f}}$$

이다. 이때, $u = \sqrt{1-2f}$로 치환하면 $du = -\frac{df}{\sqrt{1-2f}}$이므로

$$\pm x = \int \frac{2\,du}{1-u^2} = 2\tanh^{-1} u + C$$

이다. 또한

$$\sqrt{1-2f} = u = \pm \tanh\left(\frac{x}{2} + C\right)$$

이므로 다음을 얻는다.

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \tanh^2\left(\frac{x}{2} + C\right)\right) = \frac{1}{2}\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{2} + C\right)$$

단, C는 임의의 상수이다. □

6. 다음 적분값을 구하여라.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{1 + \sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}}\, dx .$$

[풀이] $y = -x$로 치환하면 다음을 얻는다.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{1 + \sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}}\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{y^2}{1 - \sin y + \sqrt{1+\sin^2 y}}\, dy$$

따라서

$$
\begin{aligned}
2\int_{-\pi}^{\pi} & \frac{x^2}{1+\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}}\,dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^2}{1+\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}}\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{y^2}{1-\sin y+\sqrt{1+\sin^2 y}}\,dy \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^2(1+\sqrt{1+\sin^2 x})}{1+\sqrt{1+\sin^2 x}}\,dx \\
&= \frac{2\pi^3}{3}
\end{aligned}
$$

이다. 그러므로

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^2}{1+\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}}\,dx=\frac{\pi^3}{3}. \qquad \square$$

7. 모든 양의 정수 n 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2n}+\left(\frac{2}{5}\right)^{2n}+\left(\frac{2}{7}\right)^{2n}+\cdots<\frac{1}{n}\ .$$

[풀이] 풀이1) n=1인 경우

$\dfrac{1}{(1.5)^2}+\dfrac{1}{(2.5)^2}+\dfrac{1}{(3.5)^2}+\cdots=\dfrac{2^2}{3^2}+\dfrac{2^2}{5^2}+\dfrac{2^2}{7^2}+\cdots<1$ 를 보여야한다.

이때 다음과 같이 보여 진다.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k+1)^2} &< \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k+1)^2-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k)(2k+2)} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\operatorname*{Lim}_{N\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}\right)\right\} \\
&= \operatorname*{Lim}_{N\to\infty}\left(1-\frac{1}{N+1}\right)=1
\end{aligned}
$$

n=k 일때 부등식이 성립한다고 가정한다. 그리고 부등식의 좌변을 $F(n)$으로 놓으면 $F(k)<\dfrac{1}{k}$으로부터 $F(k+1)<\dfrac{1}{k+1}$임을 보이면 증명이 끝나게 된다.

$$
\begin{aligned}
F(k+1) &= \left(\frac{2}{3}\right)^{2k+2}+\left(\frac{2}{5}\right)^{2k+2}+\left(\frac{2}{7}\right)^{2k+2}+\cdots \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{2k}+\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^{2k}+\left(\frac{2}{7}\right)^2\left(\frac{2}{7}\right)^{2k}+\cdots \\
&< \left(\frac{2}{3}\right)^2F(k)<\frac{4}{9k}<\frac{1}{k+1}
\end{aligned}
$$

마지막 부등식은 k가 자연수이기 때문에 보여 진다.

풀이2)

$f_\alpha(x) = x\alpha^x$ 로 놓으면 $f_\alpha'(x) = \alpha^x + x\alpha^x \ln\alpha = \alpha^x(1+x\ln\alpha)$

$x \geqq 1$인 영역에서 $\alpha \leqq e^{-1}$ 이면$f_\alpha'(x) \leqq 0$ 따라서 $f_\alpha(x) \leqq f_\alpha(1)$ 가 된다.

$\alpha = 2.5^{-2}, 3.5^{-2}, \ldots.$ 인 경우에 적용가능하고

$\dfrac{x}{(2.5)^{2x}} \leqq \dfrac{1}{2.5^2}$, $\dfrac{x}{(3.5)^{2x}} \leqq \dfrac{1}{3.5^2}$, ... 따라서

$\alpha = 1.5^{-2}$인 경우에는 $f_\alpha'(x)$로부터 x가 1부터 $(1/2)/\ln\left(\dfrac{3}{2}\right) = 1.233151\cdots$까지는 증가 그 다음부터는 감소함수이므로 f_α는 $(1/2)/\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$에서 최대값을 가진다.

이때 x 값은 자연수 값만 가지므로

즉 $\dfrac{x}{(1.5)^{2x}} \leqq \max\left(\dfrac{1}{(1.5)^2}, \dfrac{2}{(1.5)^{2\cdot 2}}\right) = \dfrac{1}{(1.5)^2}$ 이 성립한다.

나온 결과들을 종합하면

$$\frac{x}{(1.5)^{2x}} + \frac{x}{(2.5)^{2x}} + \frac{x}{(3.5)^{2x}} + \cdots \leqq \frac{1}{1.5^2} + \frac{1}{2.5^2} + \frac{1}{3.5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{2} - 4 < 1$$

이때 등호는 다음과 같이 보여 진다.

$\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots = \dfrac{\pi^2}{6}$ 로부터

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{6} &= \frac{1}{1^2} + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{1^2} + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right)\end{aligned}$$

따라서 $\dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + \dfrac{1}{7^2} + \cdots = \dfrac{\pi^2}{6} - 1 - \dfrac{1}{4}\dfrac{\pi^2}{6} = \dfrac{\pi^2}{8} - 1$이며

$$\frac{1}{(1.5)^2} + \frac{1}{(2.5)^2} + \frac{1}{(3.5)^2} + \cdots = 4\left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots\right) = 4\left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right) = \frac{\pi^2}{2} - 4$$

따라서 부등식이 성립하게 된다. □

8. 적분 가능한 함수 $f : [-\pi, \pi] \to R$ 가

$$\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\}^2 dx < \infty$$

를 만족시킨다. 음이 아닌 정수 k 에 대하여

$$a_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx\ ,\quad b_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx$$

라 할 때, $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = 0$ 임을 보여라.

[풀이] 음이 아닌 정수 k에 대하여

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx,\quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx$$

라 두자. 그리고 양의 정수 n에 대하여

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)\quad \cdots\cdots (1)$$

라 두자. $f(x)$를 식 (1)의 양변에 곱하여 구간 $[-\pi,\pi]$에서 적분하면

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi} f(x)s_n(x)\,dx\\ &= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{n}\left[a_k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx + b_k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx\right]\quad \cdots\cdots (2)\\ &= \frac{\pi a_0^2}{2} + \pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\end{aligned}$$

[주의: $\{f(x)\}^2$은 적분가능하므로 연속함수와 적분가능한 함수의 곱은 적분가능하다.]
음이 아닌 정수 m, n에 대해 다음 등식이 성립함을 알자(적분에 대한 직교성질).

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\,\sin nx\,dx = \begin{cases}0, & m\neq n\\ \pi, & m=n\end{cases}\quad \cdots\cdots (3)$$

$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,\sin nx\,dx = 0$, m과 n은 동시에 0이 아님 …… (4)

$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\,dx = 0,\quad m\neq 0$ …… (5)

식 (3), (4), (5)를 이용하여 다음 등식을 쉽게 얻을 수 있다.

$\int_{-\pi}^{\pi}[s_n(x)]^2\,dx = \frac{\pi a_0^2}{2} + \pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2).$ …… (6)

식 (2)와 식 (6)으로부터

$$\begin{aligned}0 &\le \int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - s_n(x)]^2\,dx\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\,dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)s_n(x)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi}[s_n(x)]^2\,dx\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\,dx - \left[\frac{\pi a_0^2}{2} + \pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right].\end{aligned}$$

따라서 모든 n에 대하여 다음 부등식이 성립한다.

$$\frac{\pi a_0^2}{2} + \pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \le \int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\,dx$$

이로부터 무한급수 $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$의 부분합 $\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)$은 증가수열이면서 동시에 위로 유계

이다. 따라서 무한급수 $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)$은 수렴하고, 수렴급수의 일반항은 0으로 수렴한다. 즉,

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = 0$$

이다. □