제 30회 대학 수학 경시 대회 (제 2 분야 풀이)

2011년 11월 12일 (10:00 - 13:00)

---

1. 함수 $f(x) = \dfrac{1}{x - x^{3/5}}$ 에 대하여, 다음 정적분

$$\int_{2^5}^{3^5} f(x)dx$$

의 값을 구하여라.

(풀이) 치환 $\sqrt[5]{x} = y$을 이용하자. $y^5 = x$이고 $\frac{dx}{dy} = 5y^4$이므로, 적분은

$$\int \frac{5y^4}{y^5 - y^3}dy = \frac{5}{2}(\int \frac{dy}{y-1} + \int \frac{dy}{y+1})$$

$$= \frac{5}{2}(\log|y+1| + \log|y-1|) + C$$

이 된다. 따라서 구해야할 정적분은 $\frac{5}{2}(\log|\sqrt[5]{3^{10}} - 1| - \log|\sqrt[5]{2^{10}} - 1|) = \frac{5}{2}\log\frac{8}{3}$ 이다.

2. 임의의 $n \times n$ 행렬 A 에 대하여,

$$\det\begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^3 & A^4 \end{pmatrix} = 0$$

임을 보여라 (단, A의 모든 성분은 실수이다).

(풀이) 임의의 $n \times n$ 행렬 A 에 대하여

$$\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -A^2 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^3 & A^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & A^2 \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}$$

가 성립함을 쉽게 알 수 있다 (단, I_n 은 $n \times n$ 항등행렬, 0_n 은 $n \times n$ 영행렬 이다).
이제 $\det\begin{pmatrix} P & 0_n \\ Q & R \end{pmatrix} = (\det P)(\det R)$ 임을 이용하여 행렬식을 계산하면

$$\det\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -A^2 & I_n \end{pmatrix} = 1, \quad \det\begin{pmatrix} A & A^2 \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} = 0$$

이므로, $\det\begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^3 & A^4 \end{pmatrix} = 0$ 임을 얻는다.

3. 함수 $f(x) = e^{\cos(x^2)}$ 에 대하여, $\dfrac{d^8 f}{dx^8}(0)$ 을 구하여라.

(풀이) $f(x)$의 테일러 전개를 보면

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\cos x^2} = ee^{\cos x^2 - 1} \\ &= e(1 + (-\tfrac{x^4}{2} + \tfrac{x^8}{24} - \cdots) + \tfrac{1}{2!}(-\tfrac{x^4}{2} + \tfrac{x^8}{24} - \cdots)^2 + \cdots \\ &= e(\cdots + (\tfrac{1}{24} + \tfrac{1}{8})x^8 + \cdots) \end{aligned}$$

를 만족한다. 한편, $f(x) = \cdots + \frac{f^{(8)}(0)}{8!}x^8 + \cdots$ 이므로 $f^{(8)}(0) = \frac{8!e}{6} = 6720e$이다.

4. 수열 $\{y_n\}$ 은 $y_1 = 1$, $y_2 = 3$ 이고, 임의의 양의 정수 n에 대하여

$$y_{n+2} = \frac{2}{n}\Big((n^2 + 3n + 1)y_{n+1} - 2(n+1)^2 y_n\Big)$$

을 만족한다. 이 수열의 모든 항은 양의 정수임을 보여라.

(풀이) 주어진 점화식을 정리하면

$$n(y_{n+2} - 2y_{n+1}) = 2(n+1)^2(y_{n+1} - 2y_n)$$

이 된다. $x_n = y_{n+1} - 2y_n$이라 두면, $x_n = 2^{n-1} \cdot n \cdot n!$임이 자명하다. 모든 n에 대하여, $x_n = y_{n+1} - 2y_n$이 정수이고 $y_1 = 1$이므로 귀납법에 의하여 y_n도 항상 양의 정수이다.

5. 함수 $f(x)$가 3차 다항식이라고 할 때, 다음을 증명하여라.

$$\int_0^{2n} f(x)\,dx = \frac{1}{3}\Big(f(0) + 4f(1) + 2f(2) + 4f(3) + 2f(4) + \cdots + 2f(2n-2) + 4f(2n-1) + f(2n)\Big).$$

(풀이) 구간 $[0, 2n]$에 대해, 심슨의 근삿값을 이용해서 S_{2n}을 계산하자.

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{f(2k-2) + 4(2k-1) + f(2k)}{6}\Delta_n \qquad (\text{여기서 } \Delta_n = 2) \\ &= \frac{1}{3}\left(f(0) + 4f(1) + 2f(2) + \cdots + 2f(2n-2) + 4f(2n-1) + f(2n)\right) \end{aligned}$$

이 때, $f^{(4)}(x) = 0$ 이므로 심슨의 근삿값의 오차 ES_{2n} 는 0 이다. 따라서 $\int_0^{2n} f(x)\,dx = S_{2n}$ 이 된다.

6. 주어진 $n \times n$ 행렬 $A = (a_{ij})$ 가 $1 \le i, j \le n$ 에 대하여 다음을 만족한다.

$$a_{ij} = \begin{cases} i^2 - 1, & i = j \text{ 일 때}, \\ ij, & i \neq j \text{ 일 때}. \end{cases}$$

이 행렬 A의 모든 고유치(eigenvalue)들과 행렬식을 구하라.

(풀이) $p = (1, 2, 3, \cdots, n)^T$라 두면 $A = pp^T - I$이다. a가 A의 고유치라면, 어떤 벡터 $x \neq 0$에 대하여 $Ax = ax$만족하므로

$$pp^T x - Ix = (p^T x)p - x = ax$$

를 만족한다. 따라서 p는 x와 평행하거나 수직이다. 만일 p가 x와 평행하면 $p = x$라 둘 수 있고 $((p^T p) - 1) = a$를 만족하므로 $a = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1$이다. 만일 p가 x와 수직이면,

$$pp^T x - x = (p^T x)p - x = -x$$

를 만족하므로 $a = -1$이다. 또한 고유치 -1에 해당하는 고유공간 $\{x \mid p \perp x\}$는 $n-1$ 차원 벡터공간이다. 따라서 행렬식은 $(-1)^{n-1}(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1)$이다.

7. 임의의 연속함수 $f : [0, 1] \to [0, \infty)$ 에 대하여 $I(f)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$I(f) := \int_0^1 \left(x^2 f(x) - (f(x))^3 \right) dx.$$

이 때, $I(f)$ 가 가질 수 있는 가장 큰 값을 구하여라.

(풀이) 임의의 실수 $x \in [0, 1]$ 에 대해 $f(x) \ge 0$ 이므로 산술 기하 부등식에 의해

$$f(x)^3 + \frac{x^3}{3\sqrt{3}} + \frac{x^3}{3\sqrt{3}} \ge 3 \left(\frac{f(x)^3 x^6}{27} \right)^{\frac{1}{3}} = x^2 f(x)$$

임을 얻는다. 따라서 임의의 실수 $x \in [0, 1]$ 에 대해

$$x^2 f(x) - f(x)^3 \le \frac{2}{3\sqrt{3}} x^3$$

가 성립하고, 이 부등식을 0 에서 1 까지 적분하면 임의의 연속함수 $f : [0, 1] \to [0, \infty)$ 에 대해

$$\int_0^1 \left(x^2 f(x) - (f(x))^3 \right) dx \le \frac{2}{3\sqrt{3}} \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{6\sqrt{3}}$$

임을 얻는다.

이제 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3}}$ 라 하면 $I(f) = \frac{1}{6\sqrt{3}}$ 이므로, 등호를 만족한다. 따라서 $I(f)$ 의 가장 큰 값은 $\frac{1}{6\sqrt{3}}$ 이다.

8. 좌표평면 위에 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원판 D가 있다.

(1) 다음 이중적분의 값을 구하여라.

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dxdy.$$

(2) 가로의 길이가 2011 이고 세로의 길이가 각각 $a_1, \cdots, a_n$ 인 n개의 직사각형 종이조각들이 주어져 있다. 만약 $\sum_{i=1}^{n} a_i < 2$ 이면, 이 종이들로 원판 D를 덮을 수 없음을 보여라. (단, 종이들을 겹치는 것은 허용하되 접거나 찢는 것은 허용하지 않는다.)

(풀이) (1) 극좌표를 이용하여 계산하면

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dxdy &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\sqrt{1-r^2}\right]_0^1 d\theta = 2\pi\end{aligned}$$

이므로, 답은 2π 이다. (또는 (2) 의 풀이에서 $a=-1,\ b=1$ 인 경우이므로 2π 임을 얻는다.)

(2) 종이의 길이가 모두 무한하다고 가정하고 원판을 덮을 수 없음을 보이면 충분하다. 우선 한 종이가 원판 D 중에서 $a \le x \le b$ 인 범위를 덮는다고 하자. 이 때 덮이는 부분을 W 라 하면,

$$\begin{aligned}\iint_W \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dxdy &= \int_a^b \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dydx \\ &= \int_a^b \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dtdx \quad \left(y = \left(\sqrt{1-x^2}\right) t \text{ 치환}\right) \\ &= \int_a^b \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta dx \ \ (t = \sin\theta \text{ 치환}) \\ &= (b-a)\pi\end{aligned}$$

임을 얻는다. 이제 i 번째 직사각형 종이가 원판을 부분적으로 덮는 부분을 W_i 라 하고 함수 $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ 의 적분값을 살펴보자. f의 함수값은 원점으로부터의 거리에 의해서만 값이 결정되므로 $\iint_{W_i} f\, dA$ 를 구하기 위해 이 종이가 y 축에 평행하다고 가정해도 상관없다. 그러면 종이의 너비가 곧 W_i 가 덮는 x 축의 길이이므로 위에서 계산한 결과에 의해

$$\iint_{W_i} f\, dA = a_i \pi$$

임을 쉽게 알 수 있다.
이제 이 n 개의 종이들이 원을 덮는다고 가정하면 $\cup W_i = D$ 이므로,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\pi = \sum_{i=1}^{n}(a_i\pi) = \sum_{i=1}^{n}\iint_{W_i} f\ dA\ \geq \iint_{D} f\ dA\ = 2\pi$$

를 얻고, 따라서 $\sum_{i=1}^{n} a_i \geq 2$ 이어야 한다. 즉, $\sum_{i=1}^{n} a_i < 2$ 이면 이 종이들로 원판을 덮을 수 없다.