제 23 회 전국대학생수학경시대회 풀이

(제 1 분야)

제 1 차 (오전) 10:00 – 12:00 **2004년 10월 9일(토)**

1. 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 가

$$\text{모든 실수 } x, y \in \mathbb{R} \text{ 에 대하여,} \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

를 만족시킨다고 할 때, 다음이 성립함을 보여라.

(1) 함수 f 가 $x = 0$ 에서 연속이면, 함수 f 는 모든 점 $x \in \mathbb{R}$ 에서 연속이다.

(2) 함수 f 가 $\mathbb{R}$ 에서 연속이고 $f(1) = c$ 라면, 모든 $x \in \mathbb{R}$ 에 대하여 $f(x) = c\,x$ 이다.

풀이. (1) $f(x) = f(x+0) = f(x) + f(0)$ 이므로 $f(0) = 0$.

f 가 $x = 0$ 에서 연속이므로 $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$.

$\forall\ a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a} f(x-a+a) \\
&= \lim_{x-a\to 0} (f(x-a) + f(a)) \\
&= f(0) + f(a) = f(a).
\end{aligned}$$

$\therefore f$ 는 $\mathbb{R}$에서 연속.

(2) 먼저 $c = f(1) = f(p \cdot \frac{1}{p}) = p \cdot f(\frac{1}{p})$.

$\therefore f(\frac{1}{p}) = \frac{c}{p}$ (단, $p \neq 0$는 정수).

$\forall r \in \mathbb{Q}$, 즉, $r = \frac{q}{p}$ (단, p, q는 서로 소)라면

$$f(r) = f(\frac{q}{p}) = f(q \cdot \frac{1}{p}) = q \cdot f(\frac{1}{p}) = q \cdot \frac{c}{p} = c \cdot \frac{q}{p} = c \cdot r.$$

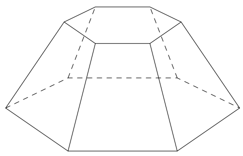
이제 $r \in \mathbb{Q}^c$라면, $\exists\ r_n \in \mathbb{Q}$ s.t. $r_n = \frac{q_n}{p_n} \to r$ (단, $(p_n, q_n) = 1$)

또, f가 $\mathbb{R}$ 위에서 연속이므로 $\lim_{n\to\infty} f(r_n) = f(r)$.

$\therefore \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} c \cdot r_n = cr \quad (\because r_n \in \mathbb{Q})$

$\therefore \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = cx. \quad \square$

2. 밑면과 윗면이 서로 평행하고 밀도가 고른 각뿔대의 질량중심(무게중심)으로부터 밑면까지의 거리와 윗면까지의 거리의 비를 구하여라. 단, 밑면에 대한 윗면의 닮음비는 r $(r < 1)$이다.



(참고: 단, 밑면의 한 변에 대한 그에 닮은 윗면의 한 변의 길이의 비는 $r < 1$ 이다.)

풀이. 각뿔의 질량중심 C 는 밑면의 중심 M 과 각뿔의 꼭지점 P 를 연결한 선분에 있고, 밑면에서 높이까지의 1/4 위치에 있다: $C = \frac{1}{4}P + \frac{3}{4}M$. 각뿔을 전체 높이의 r $(r < 1)$ 만큼 잘라내어 각뿔대를 만든다고 하자. (이때 밑면에 대한 윗면의 닮음비가 r 이다.) 그러면 잘라낸 부분과 각뿔대의 질량의 비는 $r^3 : (1 - r^3)$이다. 잘라낸 부분의 질량 중심의 위치는 각뿔의 꼭지점 P 에서 밑면 중심 M 까지의 $(3/4)r$ 위치이고, 구하는 각뿔대의 질량중심을 $xP + (1 - x)M$ 으로 두면 전체 질량 중심 C 는

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}P + \frac{3}{4}M &= r^3\left((1 - \frac{3}{4}r)P + \frac{3}{4}rM\right) + (1 - r^3)(xP + (1 - x)M) \\
&= (r^3(1 - \frac{3}{4}r) + (1 - r^3)x)P + (\frac{3}{4}r^4 + (1 - r^3)(1 - x))M
\end{aligned}
$$

이다. 따라서

$$x = \frac{1 - 4r^3 + 3r^4}{4(1 - r^3)} \quad \text{또는} \quad 1 - x = \frac{3(1 - r^4)}{4(1 - r^3)}.$$

그러므로, 중심에서 밑면까지의 거리: 윗면까지의 거리는

$$
\begin{aligned}
x : (1 - x - r) &= \frac{1}{4}(1 - r^3(4 - 3r))/(1 - r^3) : \left(\frac{3}{4}(1 - r^4)/(1 - r^3) - r\right) \\
&= (1 - 4r^3 + 3r^4) : \big(3(1 - r^4) - 4r(1 - r^3)\big) \\
&= (1 - r)(1 + r + r^2 - 3r^3) : (1 - r)(3(1 + r + r^2 + r^3) - 4r(1 + r + r^2)) \\
&= (1 + r + r^2 - 3r^3) : (3 - r - r^2 - r^3) \\
&= (1 + 2r + 3r^2) : (3 + 2r + r^2)
\end{aligned}
$$

답: $(1 + 2r + 3r^2) : (3 + 2r + r^2)$ $\square$

3. 각 변의 길이가 변 AB 로부터 순서대로 a, b, c, d 로 주어진 볼록사각형 $ABCD$ 의 면적이 최대가 되기 위해서는 그 사각형이 원에 내접해야 함을 보여라.

풀이. 사각형의 면적을 S라 하면

$$S = \triangle ABD + \triangle BCD = \frac{1}{2}(ad \sin A + bc \sin C) \tag{1}$$

또

$$\overline{BD}^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \cos C \tag{2}$$

(2)에서 양변을 A에 관하여 미분하면

$$2ad \sin A = 2bc \sin C \cdot \frac{dC}{dA}$$

$$\therefore \ \frac{dC}{dA} = \frac{ad \sin A}{bc \sin C} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dA} &= \frac{1}{2}\left(ad \cos A + bc \cos C \cdot \frac{dC}{dA}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(ad \cos A + bc \cos C \cdot \frac{ad \sin A}{bc \sin C}\right) \\ &= \frac{ad(\sin C \cos A + \cos C \sin A)}{2 \sin C} \\ &= \frac{ad \sin(C + A)}{2 \sin C} \end{aligned}$$

이때 사각형이 볼록이므로 $0 < A, C < \pi$, $0 < A + C < 2\pi$.

$\therefore \ \frac{dS}{dA} = 0$에서 $\sin(C + A) = 0$.

$$\therefore \ C + A = \pi.$$

이때 $\sin A$, $\sin C > 0$ 이므로 $\frac{dC}{dA} > 0$, 즉, C는 A의 증가함수. 또 $C + A = \pi$에서 $\frac{dS}{dA}$의 부호가 $+$에서 $-$ 로 바뀌므로

면적 S 는 $C + A = \pi$ 일 때 최대. 즉, 사각형이 원에 내접할 때 면적이 최대. □

4. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ 을 n-차원 벡터공간 $\mathbb{R}^n$ 의 정규직교 기저(orthonormal basis)라고 할 때, $\mathrm{span}\{\, i\,\mathbf{v}_i - j\,\mathbf{v}_j \mid 1 \le i < j \le n \,\}$ 의 직교 여공간(orthogonal complement)을 구하여라.

풀이. $1 \le i, j \le n$, $j \ge i+2$인 i, j 에 대하여

$$i\,\mathbf{e}_i - j\,\mathbf{e}_j = \sum_{k=i}^{j-1} \big(\, k\,\mathbf{e}_k - (k+1)\,\mathbf{e}_{k+1} \,\big)$$

이므로

$$\begin{aligned} W &:= \mathrm{span}\{\, i\,\mathbf{e}_i - j\,\mathbf{e}_j \mid i \ne j,\ 1 \le i, j \le n \,\} \\ &= \mathrm{span}\{\, i\,\mathbf{e}_i - (i+1)\,\mathbf{e}_{i+1} \mid i = 1, 2, \ldots, n-1 \,\} \end{aligned}$$

이 성립한다. 또한, $i\,\mathbf{e}_i - (i+1)\,\mathbf{e}_{i+1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$ 은 일차 독립인 벡터들이다. 그러므로, W 는 $\mathbb{R}^n$ 의 $(n-1)$-차원 부분공간이다.

$\mathbf{v} := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\,\mathbf{e}_i$ 를 선택하면, 쉽게 $\mathbf{v} \in W^{\perp}$ 임을 알 수 있다. W 의 직교 여공간은 1 차원이어야 하므로, $W^{\perp} = \{\, t\,\mathbf{v} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$. $\square$

5. $33^k - 7^\ell$ (k 와 ℓ 은 자연수)의 형태로 주어지는 자연수 중 최소값을 A 라고 하고, $7^m - 33^n$ (m 과 n 은 자연수)의 형태로 주어지는 자연수 중 최소값을 B 라고 하자. 자연수 $A+B$ 를 구하여라.

풀이. 법(modulo) 계산을 이용하기로 한다.

(i) 먼저 A를 구하기로 하자.

$33 \equiv 1 \pmod{16}$ 이므로, 모든 자연수 k 에 대하여 $33^k \equiv 1 \pmod{16}$이고,

$7 \equiv 7 \pmod{16}$ 이고 $7^2 \equiv 1 \pmod{16}$ 이므로, 모든 자연수 ℓ 에 대하여 $7^\ell \equiv 1$ 또는 $7 \pmod{16}$이 된다. 그러므로,

$33^k - 7^\ell \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{16}$ 또는 $1 - 7 \equiv -6 \ \equiv 10 \pmod{16}$ 이 성립하여, $33^k - 7^\ell$ 으로 나타날 수 있는 자연수로는 $10, 16, 26, 32, \ldots$ 등이 가능하다.

그런데, $k = \ell = 1$ 이면 $33^1 - 7^1 = 26$ 이므로, $A = \min\{33^k - 7^n\ell \mid k, \ell$ 은 자연수 $\}$ 는 10, 16 또는 26 이다.

여기서 $33 \equiv 0 \pmod{3}$ 이고 $7 \equiv 1$ (mod 3)) 이기 때문에, $33^k - 7^\ell \equiv 2 \pmod{3}$ 이어야 한다.

그런데, $10 \equiv 1 \pmod{3}$, $16 \equiv 1 \pmod{3}$ 이기 때문에 $33^k - 7^\ell \neq 10$ 또는 16 이다. 즉, $A = 26$ 임을 알 수 있다.

(ii) 동일한 방법으로 B 를 구하면, $7^m - 33^n \equiv 0$ 또는 $6 \pmod{16}$.

그래서, $7^m - 33^n \equiv 6, 16, 22, \ldots$ 이어야 한다.

그런데, $7^2 - 33^1 = 16$ 이고, $7^m - 33^n \equiv 1 \pmod{3}$ 인데 $6 \equiv 0 \pmod{3}$ 이므로, $B = 16$ 이어야 한다.

(iii) 그러므로, $A + B = 26 + 16 = 42$. $\square$

6. 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 의 2계 도함수 $f''(x)$ 가 구간 $[0,1]$ 에서 존재하고 유계이다. 모든 자연수 n 에 대하여 $0 < a_n < 1$ 인 수열 $\{a_n\}$ 의 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 는 발산하지만 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 은 수렴한다고 할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ 이 수렴하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} |f(a_n)|$ 도 수렴함을 보여라.

풀이. 구간 $[0, a_n]$에서 Taylor 공식을 적용하면 적당한 $\xi_n \in (0, a_n)$ 에 대하여

$$f(a_n) = f(0) + a_n f'(0) + \frac{a_n^2}{2} f''(\xi_n)$$

이 되고, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ 이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0$ 이고 $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 0$ 으로부터 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 이므로 f 의 연속성에 의하여 $f(0) = 0$ 가 된다. 한편,

$$|\, f''(x)\, | \le M, \quad \forall\, x \in [0,1]$$

으로부터

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n^2 f''(\xi_n)}{2} \right| \le \frac{M}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

이 되어 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 f''(\xi_n)}{2}$$

는 절대수렴한다. 따라서, 급수

$$f'(0) \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(a_n) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 f''(\xi_n)}{2}$$

는 수렴하고 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 발산하므로 $f'(0) = 0$ 가 된다. 결론적으로

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\, f(a_n)\, | = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n^2 f''(\xi_n)}{2} \right|$$

은 수렴한다. □

7. 좌표평면에서 T 를 주기로 갖는 곡선 $(x(t), y(t))$ 가 양수 a, b, c, d 에 대하여 미분방정식

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy, \quad \frac{dy}{dt} = -cy + dxy, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 1$$

을 만족시킨다고 할 때, 다음의 두 값

$$\bar{x} := \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt, \qquad \bar{y} := \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,dt$$

을 구하여라.

풀이. $x(0) = x(T)$ 이므로,

$$\begin{aligned} 0 &= \log x(T) - \log x(0) = \int_0^T \frac{x'}{x}\,dt \\ &= \int_0^T (a - by)\,dt \\ &= aT - b\int_0^T y\,dt \end{aligned}$$

이다. 따라서 y 의 평균값은 a/b 이다. 마찬가지로 x 의 평균값은 c/d 이다.

답: $\bar{x} = \frac{c}{d}$, $\bar{y} = \frac{a}{b}$. $\square$

8. 단위벡터 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ 에 대하여 $P_{\mathbf{v}}$ 는 $\mathbf{v}$ 방향의 직선으로의 정사영, 즉, 임의의 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 에 대하여 $P_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}$ 이다. A 를 $n \times n$ 크기의 *양 대칭행렬*, 즉, $A > 0$ 이라고 할 때,

$$A - \lambda P_{\mathbf{v}} \geq 0$$

이 되는 λ 의 최대값을 구하여라. (단, 대칭행렬 B 의 모든 고유값이 양이면 $B > 0$ 으로 표현하고, 음이 아니면 $B \geq 0$ 으로 표현한다.)

풀이. $A - \lambda P_{\mathbf{v}}$를 대각화하는 고유값과 고유벡터를

$$(\mu_1, \mathbf{f}_1), (\mu_2, \mathbf{f}_2), \cdots, (\mu_n, \mathbf{f}_n), \qquad \text{단,}\ \ \mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n$$

이라고 하자. $A - \lambda P_{\mathbf{v}} \geq 0$ 이 되게 하는 λ의 최대값은 $\mu_n = 0$ 일 때 일어난다. 즉,

$$A\mathbf{f}_n - \lambda(\mathbf{f}_n \bullet \mathbf{v})\mathbf{v} = 0.$$

따라서

$$\mathbf{f}_n = \lambda(\mathbf{f}_n \bullet \mathbf{v})A^{-1}\mathbf{v}.$$

양변에 $\mathbf{v}$와의 내적을 택해서

$$(\mathbf{v} \bullet \mathbf{f}_n) = \lambda(\mathbf{f}_n \bullet \mathbf{v})\langle A^{-1}\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle$$

그런데 $\mathbf{v} \bullet \mathbf{f}_n \neq 0$. 즉, $1 = \lambda\langle A^{-1}\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle$, so

$$\lambda = (A^{-1}\mathbf{v} \bullet \mathbf{v})^{-1} = (\langle A^{-1}\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle)^{-1}.$$

단, 이때, $\mathbf{v} \bullet f_n = 0$ 이면 $A\mathbf{f}_n = 0$ 이 되어 모순 ($\because\ A^{-1}$ 이 존재.) $\square$

9. 집합 $\{1, 2, \cdots, 39, 40\}$ 의 크기가 $|B| = 30$ 인 임의의 부분집합 B 에 대하여, 다음 조건을 만족시키는 B 의 부분집합 A 가 존재함을 보여라.

   (i) $|A| \geq 10$.

   (ii) 임의의 원소 $x, y \in A$ 에 대하여 $x + y \notin A$.

풀이. 먼저, 소수 $p = 89 = 3 \cdot 29 + 2$ 와 집합 $C = \{30, 31, \ldots, 58, 59\}$을 생각하기로 한다. 집합 C의 제일 작은 원소 두 개, $30, 31$에 대하여도 $30 + 31 = 61 \notin C$ 이므로 집합 C의 임의의 두 개 원소의 합은 C의 원소가 될 수 없음을 쉽게 알 수 있다.

또한, 집합 C의 크기는 $|C| = 30$ 으로 집합 $\{1, 2, \ldots, 88, 89\}$의 크기의 $1/3$ 보다 큼을 알 수 있다.

그러므로, 집합 B를 집합 $\{1, 2, \ldots, 89\}$ 의 부분집합으로 볼 수 있다면, 특히, B의 원소가 $\{1, 2, \ldots, 89\}$ 에 고르게 분포한다면 집합 C에 포함되는 B의 원소의 집합이 원하는 집합 $A \subset B$이 된다.

각 원소 $k \in \{1, 2, \ldots, 89\}$ 마다

$$B_k := kB \pmod{89} := \{kb \pmod{89} \,|\, b \in B\}, \qquad k = 1, 2, \ldots, 89$$

를 정의하면, $B_k \subset \{1, 2, \ldots, 89\}$ 이고 $|B_k| = 30$ 이다.

(왜냐하면, $b_i \neq b_j \in B$ 에 대하여 $kb_i \equiv kb_j \pmod{89}$ 라면,

$$kb_i - kb_j = k(b_i - b_j) = 89 \cdot \text{정수}$$

인데, 89 가 소수이므로 $89 \,|\, k$ 또는 $89 \,|\, (b_i - b_j)$ 이어야 하는데 $k < 89$ 이고 ($b_i < b_j$ 를 가정할 경우) $b_i - b_j < 89$ 이므로 불가능한 일. 즉, $|B_k| = |B|$.)

이제, 각 $b \in B$ 를 고정시키면 kb 는 $\{1, 2, \ldots, 89\}$ 에 고르게 분포함.

그러므로, 적절한 k_0에 대하여

$$|B_{k_0} \cap C| \geq \frac{1}{3}|B| = 10$$

이 성립하는 k_0가 존재한다.

그러면, $A = \{\, b \in B \,|\, k_0 b \pmod{89} \in C \,\}$가 원하는 집합. $\square$

제 23 회 전국대학생수학경시대회 답안

(제 2 분야)

제 1 차 (오전) 10:00 – 12:00 **2004년 10월 9일(토)**

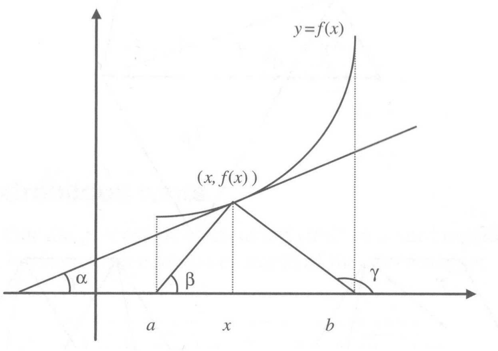
---

5. 함수 $f : [a, c] \to (0, \infty)$ 가 구간 $[a, c]$ 에서 연속이고 구간 (a, c) 에서 미분가능하다. 함수 f 의 그래프 위의 점 $(x_0, f(x_0))$ 를 P 라 하자. 점 P 와 점 $(a, 0)$, 점 P 와 점 $(c, 0)$ 를 잇는 각 직선이 x 축과 이루는 각을 각각 α 와 γ 라 하고, 점 P 에서의 접선이 x 축과 이루는 각을 β 라고 할 때,

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = 0$$

을 만족시키는 x_0 가 구간 (a, c) 내에 존재함을 보여라. (단, 접선이 x 축과 만나지 않는 경우, $\beta = 0$ 로 한다.)

풀이.



각각의 각 α, β, γ는 정의에 따라,

$$\tan\alpha = \frac{f(x)}{x-a}, \qquad \tan\beta = f'(x), \qquad \tan\gamma = \frac{f(x)}{x-c}$$

로 주어진다. 그러면 함수 $g(x) = (x-a)(x-c)f(x)$는 구간$[a, c]$에서 연속이고 구간(a, c)에서 미분가능하다. $g(a) = g(c) = 0$ 이므로 Rolle의 정리에 의하여 $g'(x_0) = 0$가 되는 점 $x_0 \in (a, c)$ 이 존재한다. 그런데, $g'(x) = (x-c)f(x) + (x-a)f(x) + (x-a)(x-c)f'(x)$ 이므로

$$0 = g'(x_0) = (x_0 - c)f(x_0) + (x_0 - a)f(x_0) + (x_0 - a)(x_0 - c)f'(x_0)$$

이다. 이 식을 다시 쓰면

$$0 = \frac{f(x_0)}{x_0 - a} + \frac{f(x_0)}{x_0 - c} + f'(x_0) = \tan\alpha + \tan\gamma + \tan\beta. \quad \square$$

8. 적분

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

을 계산하여라.

풀이.

$$\begin{aligned} I &:= \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx. \end{aligned}$$

이때, 두 번째 적분에서 $y = \pi - x$로 치환하면

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{(\pi-y)\sin(\pi-y)}{1+\cos^2(\pi-y)}\,(-dy) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi-y)\sin y}{1+\cos^2 y}\,dy. \end{aligned}$$

그러므로

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx \\ &= \int_1^0 \frac{\pi}{1+t^2}(-dt) \qquad (t = \cos x) \\ &= \int_0^1 \frac{\pi}{1+t^2}\,dt \\ &= \pi\tan^{-1} t\Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{4} \quad \square \end{aligned}$$

제 23 회 대수경 보충문제와 답안

2004년 10월 9일(토)

---

1. **함수** $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ **는 감소하지 않는 연속함수이다. 임의의 양의 실수** s_0, s_1 **(단,** $s_0 < s_1$**)과** M **에 대하여**

$$s_0 f(x+\lambda) < \hat{s} f(x), \qquad \forall x \in [0, M], \quad \lambda \in (0, \lambda_0)$$

를 만족하는 수 $\hat{s} \in (s_0, s_1)$ **와** $\lambda_0 \in (0,1)$ **가 존재함을 증명하여라.**

풀이. **함수** $f : [0, M+1] \to (0, \infty)$ **는 고른 연속이고** $f(0) > 0$ **이다.**

따라서, $\epsilon < \frac{s_1 - s_0}{s_0} f(0)$ **인** ϵ **에 대하여 적당한** $\delta > 0$ **가 존재하여** $0 < \lambda < \lambda_0 := \min\{\delta, 1\}$ **이면**

$$f(x+\lambda) - f(x) < \epsilon, \qquad \forall\ x \in [0, M]$$

이다. $s' = \frac{\epsilon}{f(0)}$ **으로 두면**

$$f(x+\lambda) < s' f(0) + f(x) \le (s'+1) f(x), \qquad \forall\ x \in [0, M]$$

이 된다. ϵ**을 조절하여** $s' + 1 = \frac{\hat{s}}{s_0}$ **가 되도록** $\hat{s}$**를** (s_0, s_1) **에서 잡으면 원하는 결과를 얻을 수 있다.** $\square$

2. **실수항으로 이루어진** 3×3 **행렬** A **와 그의 전치행렬** $A^\top$ **의 곱** $A^\top A$ **가 항등행렬** E **로 주어진다고 하자. 그러면,** 1 **또는** -1 **이** A **의 고유값(eigenvalue)임을 증명하여라.**

풀이.

우선 $1 = \det(E) = \det(A^\top A) = \det(A^\top) \cdot \det(A) = (\det(A))^2$ **에서,** $\det(A) = 1$ **또는** $\det(A) = -1$ **임을 안다.**

먼저 $\det(A) = 1$ **인 경우를 살펴보자.** $\det(A-E) = \det(A-A^\top A) = \det((E-A^\top)A) = \det(E-A^\top)\cdot\det(A) = \det(E-A)\cdot 1 = (-1)^3 \det(A-E)$ **이다. 그러므로** $\det(A-E) = 0$ **이고, 따라서 1 이 고유값이다.**

이제 $\det(A) = -1$ **인 경우를 살펴보자.** $\det(A+E) = \det(A+A^\top A) = \det((E+A^\top)A) = \det(E+A^\top) \cdot \det(A) = \det(E+A) \cdot (-1) = -1 \det(A+E)$ **이다. 그러므로** $\det(A+E) = 0$ **이고, 따라서** -1 **이 고유값이다. 이상으로 증명을 마친다.** $\square$