제 29회 전국 대학생 수학 경시대회 제 2 분야 풀이

1. 적분 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}$ 를 구하여라.

풀 이

다음이 성립한다.

[1] $\displaystyle \frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{2x-1}{6(x^2-x+1)} + \frac{1}{2(x^2-x+1)}$,

[2] $\displaystyle \lim_{t\to\infty}\int_0^t \left(\frac{1}{3(x+1)} - \frac{2x-1}{6(x^2-x+1)}\right)dx = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{6}\left(\ln(t+1)^2 - \ln(t^2-t+1)\right),$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{6}\ln\frac{t^2+2t+1}{t^2-t+1} = 0$$

[3] $\displaystyle \int_0^\infty \frac{dx}{x^2-x+1} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]_0^\infty = \frac{4\sqrt{3}\pi}{9}$

따라서 [1], [2], [3]에 의해 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$ 이다.

2. 곡선 $y=\dfrac{x^2}{2}\ (0 \le x \le 1)$ 을 x 축을 중심으로 회전시켜 생기는 곡면의 넓이를 구하여라.

풀 이

x축에 관해 회전시켜 생기는 곡면의 넓이는 $\displaystyle\int_a^b 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$ 이고 $y'=x$ 이므로 구하는 곡면의 넓이는 $\displaystyle\pi\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^2}\ dx$ 이다.

또, $x=\sinh t=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$ 로 치환하면 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^2}\,dx &= \int_0^{\operatorname{arcsinh}1}\sinh^2 t\cosh^2 t\,dt=\int_0^{\operatorname{arcsinh}1}\frac{1}{4}\sinh^2 2t\,dt\\ &=\int_0^{\operatorname{arcsinh}1}\frac{\cosh(4t)-1}{8}dt=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sinh(4t)-t\right]_0^{\operatorname{arcsinh}1}\\ &=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sinh(4\operatorname{arcsinh}1)-\operatorname{arcsinh}1\right]\end{aligned}$$

그런데 $\operatorname{arcsinh}1=\ln(1+\sqrt{2})$이므로

$$\frac{1}{4}\sinh(4\ln(1+\sqrt{2}))-\ln(1+\sqrt{2})=3\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}-1)=3\sqrt{2}-\ln(\sqrt{2}+1)$$

따라서 곡면의 넓이는 다음과 같다.

$\dfrac{\pi}{8}\left[\dfrac{1}{4}\sinh(4\ln(1+\sqrt{2}))-\ln(1+\sqrt{2})\right]$ 또는 $\dfrac{\pi}{8}(3\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}-1))$ 또는

$\dfrac{\pi}{8}(3\sqrt{2}-\ln(\sqrt{2}+1))$

3. $x>1$ 에서 미분방정식 $(x-1)y''-xy'+y=0$ 의 일반해를 구하여라.

풀 이 1

$y_1=x,\ y_2=e^x$는 준 식을 만족하는 1차 독립인 해이므로 일반해는 다음과 같다.

$$y=c_1x+c_2e^x \ (c_1, c_2\text{는 임의의 상수})$$

풀이 2

$y_1=x$ 는 해이다. $y_2=xu$ 가 해가 되도록 u를 구하자. 식에 대입하면

$$x(x-1)u''-(x^2-2x+2)u'=0$$

이므로 $\left[\dfrac{x^2}{x-1}e^{-x}u'\right]'=0$ 이다. $\dfrac{x^2}{x-1}e^{-x}u'=1$ 이라 하면 $u'=\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)e^x$를 적분하여 $u=\dfrac{1}{x}e^x$를 얻는다.

따라서 $y_2=e^x$ 는 $y_1=x$와 1차 독립인 해이므로 일반해는 다음과 같다.

$$y=c_1x+c_2e^x \ (c_1, c_2\text{는 임의의 상수})$$

풀이 3

$y_1=e^x$ 는 해라 하고 같은 방법으로 풀면 $y_2=x$를 얻는다.

4. $n \geq 3$ 일 때, 다음 연립방정식을 풀어라.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdot & \cdot & \cdot & n \\ 2 & 3 & \cdot & \cdot & \cdot & n & 1 \\ 3 & \cdot & \cdot & \cdot & n & 1 & 2 \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ n & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & n-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-1 \\ n-2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}$$

풀 이

식을 모두 더하면

$\dfrac{n(n+1)}{2}\sum_{k=1}^{n} x_k = \dfrac{n(n+1)}{2}$ 이므로, $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1 \ \cdots$ ①

$i \geq 2$에 대해 i행에서 $i-1$행을 빼면

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdot & \cdot & \cdot & n \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1-n \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1-n & 1 \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ 1 & 1-n & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ -1 \\ -1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$i \geq 2$에 대해 i행에서 $\sum_{k=1}^{n} x_k - n x_i = -1$ 이므로 $-n\,x_i = -2$이다.

따라서 $x_2 = x_3 = \ \cdots \ = x_n = \dfrac{2}{n}$ 이고 ①로부터 $x_1 = \dfrac{2-n}{n}$이다.

답; $x_1 = \dfrac{2-n}{n}$, $x_2 = x_3 = \ \cdots = x_n = \dfrac{2}{n}$.

5. 두 정사각행렬 A 와 B 가 $A+B=AB$ 를 만족하면 $AB=BA$ 임을 보여라.

풀 이

$AB-A-B=O$ 임으로 양변에 항등행렬 I 을 더하면 다음이 성립한다.

$$AB-A-B+I=(A-I)(B-I)=I$$

따라서 $A-I$ 와 $B-I$ 는 서로 역행렬 관계이므로

$$(B-I)(A-I)=I$$

이다. 따라서 $BA-A-B+I=I$ 이므로 $BA=B+A=A+B=AB$ 이다.
따라서 $BA=AB$ 이다.

6. $x=1$ 에서 극값을 갖는 연속함수 $y=f(x)$ 가 $x=1$ 근방에서 $y^3+3xy^2+x^3y=1$ 을 만족한다. $x=1$ 에서 $f(x)$ 의 2차 테일러다항식을 구하고, $f(1)$ 이 극댓값인지 극솟값인지 판정하여라.

풀 이

$y^3+3xy^2+x^3y=1$ 의 양변을 x 로 미분한 후 정리하면

$$(3y^2+6xy+x^3)y' = -(3y^2+3x^2y) \quad \cdots \text{①}$$

$x=1$ 근방에서 $y^3+3xy^2+x^3y=1$ 을 만족하므로

$$y^3+3y^2+y=1 \quad \cdots \text{②}$$

$x=1$ 에서 극값을 가지므로 $f'(1)=0$ 으로부터

$$3y^2+3y=0 \quad \cdots \text{③}$$

②와 ③에 의해 $f(1)=-1$

①을 x 로 미분한 후 정리하면

$$(3y^2+6xy+x^3)y''+(6yy'+6y+6xy'+3x^2)y' = -(6yy'+6xy+3x^2y') \quad \cdots \text{④}$$

$f'(1)=0,\ f(1)=-1$이므로 $f''(1)=-3$이다.

따라서 $x=1$ 에서 $f(x)$ 의 2차 테일러다항식은 다음과 같다.

$$f(1)+\frac{f'(1)}{1}(x-1)+\frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 = -1-\frac{3(x-1)^2}{2}$$

이때 $f''(1)=-3<0$ 이므로 $f(1)$ 은 극댓값이다.

7. (1) $f\left(\cos\dfrac{\pi}{7}\right)=0$ 인 정수 계수 3차 다항식 $f(x)$ 를 구하여라.

(2) $4\sin\dfrac{2\pi}{7}-\tan\dfrac{\pi}{7}=\sqrt{7}$ 임을 보여라.

풀이

(1) $e^{\frac{\pi i}{7}}$ 가 방정식 $(x^7+1)/(x+1)=x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1=0$의 해이므로

$2\cos\dfrac{\pi}{7}$ 는 방정식 $x^3-x^2-2x+1=0$의 해이다.

따라서 $f\left(\cos\dfrac{\pi}{7}\right)=0$ 인 정수 계수 3차 다항식 $f(x)$ 는 $f(x)=8x^3-4x^2-4x+1=0$이다.

(2) $a=\cos\dfrac{\pi}{7}$ 라 하면 $8a^3-4a^2-4a+1=0$이 된다.

따라서 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\left(4\sin\frac{2\pi}{7}-\tan\frac{\pi}{7}\right)^2-7&=-\frac{64a^6-80a^4+24a^2-1}{a^2}\\&=-\frac{(8a^3-4a^2-4a+1)(8a^3+4a^2-4a-1)}{a^2}=0\end{aligned}$$

따라서 $4\sin\dfrac{2\pi}{7}-\tan\dfrac{\pi}{7}=\pm\sqrt{7}$ 이다.

그런데 $\tan\dfrac{\pi}{7}<\tan\dfrac{\pi}{4}=1$, $4\sin\dfrac{2\pi}{7}>4\sin\dfrac{\pi}{6}=2$ 이므로 $4\sin\dfrac{2\pi}{7}-\tan\dfrac{\pi}{7}>0$ 이다.

따라서 $4\sin\dfrac{2\pi}{7}-\tan\dfrac{\pi}{7}=\sqrt{7}$ 이다.

8. 실수 a 에 대하여 적분 $\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(ax)\,dx$ 를 구하여라.

풀이

$f(t) = \int_0^\infty e^{-x^2}\cos(tx)\,dx$ 라 하자. 이때 f 는 미분가능하고 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{d}{dt}\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(tx)\,dx = \int_0^\infty e^{-x^2}\frac{d}{dt}\cos(tx)\,dx \\ &= \int_0^\infty x e^{-x^2}\sin(tx)\,dx = \int_0^\infty \sin(tx)\,d\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right) \\ &= -\frac{t}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(tx)\,dx = -\frac{t}{2}f(t) \end{aligned}$$

따라서 $f(t)$ 는 미분방정식

$$f'(t) + \frac{t}{2}f(t) = 0$$

의 해이다. 이 미분방정식을 풀면

$$f(t) = Ce^{-\frac{t^2}{4}}$$

그런데

$$f(0) = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

이므로

$$f(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{a^2}{4}}.$$