제25회 전국 대학생 수학 경시대회 문제 풀이

제 1 차 문제 (제 1, 제 2 분야 공통)

1. 함수 $f(x) = \arctan(2x)$ 에 대하여, $f^{(99)}(0)$ 의 값을 구하여라.

[풀이]

$$\arctan x = \sum (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$$

이므로 $f(x) = \arctan(2x)$ 라고 하면

$$f(x) = \sum (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{2n+1} x^{2n+1} = \sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

로부터

$$f^{(99)}(0) = (-1)^{49} \frac{2^{99}}{99} 99! = -2^{99} 98!.$$

□

2. 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 은 주기가 $2T$ 인 연속함수이다. 이 때, 적당한 x_o 에 대하여 $f(x_o + T) = f(x_o)$ 이 성립함을 보여라.

[풀이] $g(x) = f(x+T) - f(x)$ 라 하면 $g(x)$ 는 연속이고

$$g(0) = f(T) - f(0),\ g(T) = f(2T) - f(T) = f(0) - f(T) = -g(0).$$

따라서 0 과 T 사이에 $g(x_o) = o$ 인 x_o 가 존재한다. □

3. 임의의 $n \times n$ 행렬 X, Y 에 대하여 $\mathrm{trace}(XYA) = \mathrm{trace}(YXA)$ 를 만족시키는 $n \times n$ 행렬 A 는 단위행렬(항등행렬)의 상수배임을 보여라. trace 는 대각 원소의 합을 나타낸다.

[풀이] $E_{i,j}$ 를 (i,j) 원소가 1 이고 기타 원소는 0인 정사각행렬이라 하면

$$\begin{aligned} E_{i,j} &= E_{i,i}E_{i,j} - E_{i,j}E_{i,i} \quad (i \neq j) \\ E_{i,i} - E_{j,j} &= E_{i,j}E_{j,i} - E_{j,i}E_{i,j} \quad (\forall\ i,j) \end{aligned}$$

가 만족되므로, 서로 다른 i, j 에 대하여

$$\mathrm{tr}(E_{i,j}A) = 0 = \mathrm{tr}((E_{i,i} - E_{j,j})A)$$

를 얻는다. 따라서 $A = (a_{r,s})$ 에 대하여, 서로 다른 i, j 에 대하여

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{tr}(E_{i,j}A) = a_{j,i}, \\ 0 &= \mathrm{tr}((E_{i,i} - E_{j,j})A) = a_{i,i} - a_{j,j} \end{aligned}$$

이고 따라서 A 는 단위행렬의 상수배이다. □

4. 양수들의 수열 a_n 에 대하여, 극한값 $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 이 존재한다. 이 극한값이 1 보다 크면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴함을 보여라.

[풀이] 모든 $n > N$ 에 대하여

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) \geq 1+r, \quad r>0$$

이 존재한다. 즉,

$$na_n - (n+1)a_{n+1} \geq ra_{n+1}.$$

그러므로

$$\begin{aligned} Na_N - (N+1)a_{N+1} &\geq ra_{N+1}, \\ (N+1)a_{N+1} - (N+2)a_{N+2} &\geq ra_{N+2}, \\ (N+p-1)a_{N+p-1} - (N+p)a_{N+p} &\geq ra_{N+p}. \end{aligned}$$

이 식들을 변변 더하면

$$Na_N - (N+p)a_{N+p} \geq r(a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots + a_{N+p}).$$

그러므로

$$\begin{aligned} S_{N+p} - S_N &\leq \frac{1}{r}(Na_n - (N+p)a_{N+p}) \leq \frac{1}{r}Na_n \\ S_{N+p} &\leq S_N + \frac{1}{r}Na_N. \end{aligned}$$

양항급수의 부분합이 유계이므로 주어진 급수는 수렴한다. □

5. 함수 $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ 의 도함수 f' 가 연속이고 $\lim_{x\to\infty}(f(x)+f'(x))=0$ 이면, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ 임을 보여라.

[풀이] $g(x) = f(x) + f'(x)$ 라 하면 일계선형미분방정식의 풀이에 의해

$$f(x) = e^{-x}\int_a^x e^t g(t)dt + ce^{-x}$$

가 된다. $\epsilon > 0$ 이라 하면, $\lim_{x\to\infty} g(x) = o$ 이므로 모든 $x > a$ 에 대해 $|g(x)| < \epsilon$ 되는 a 를 택할 수 있다. 이제

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq e^{-x}\int_a^x e^t g(t)dt| = |ce^{-x}| \\ &\leq e^{-x}\int_a^x e^t|g(t)|dt + |ce^{-x}| \\ &\leq \epsilon e^{-x}\int_a^x e^t dt + |ce^{-x}| \\ &= \epsilon e^{-x}(e^x - e^a) + |ce^{-x}| \\ &= \epsilon(1 - e^{a-x}) + |ce^{-x}| \end{aligned}$$

충분히 큰 x 에 대해 $|f(x)| < 2\epsilon$ 이므로 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ 이다. □

제 2 차 문제 (제 1 분야)

6. 적분값 $\int_0^\infty \sin(x^2)dx$ 는 존재하지만 적분값 $\int_0^\infty |\sin(x^2)|dx$ 는 존재하지 않음을 보여라.

[풀이] 함수 $\sin(x^2)$ 는 [0,1]에서 연속이므로 $\int_0^1 \sin(x^2)dx$ 가 존재하고 따라서 $\int_1^\infty \sin(x^2)dx$ 의 존재만 보이면 된다. 이제 $u = x^2$ 라 두면

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \sin(x^2)dx &= \int_1^\infty \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}du \\ = & \left[-\frac{\cos u}{2\sqrt{u}}\right]_1^\infty - \int_1^\infty \frac{\cos u}{4u\sqrt{u}}du = \frac{\cos 1}{2} - \int_1^\infty \frac{\cos u}{4u\sqrt{u}}du. \end{aligned}$$

한편,

$$\int_1^\infty \left|\frac{\cos u}{4u\sqrt{u}}\right| du \le \int_1^\infty \frac{1}{4u\sqrt{u}}du = \frac{1}{2}$$

이므로 $\int_1^\infty \frac{\cos u}{4u\sqrt{u}}$ 가 존재하고 따라서 $\int_1^\infty \sin(x^2)dx$ 도 존재한다. 이제

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty |\sin(x^2)|dx \ge \int_{\sqrt{2\pi}}^\infty |\sin(x^2)|dx \\ = & \sum_{k=1}^\infty [\int_{\sqrt{2k\pi}}^{\sqrt{(2k+1)\pi}} |\sin(x^2)|dx + \int_{\sqrt{(2k+1)\pi}}^{\sqrt{(2k+2)\pi}} |\sin(x^2)|dx \\ \ge & \sum_{k=1}^\infty \int_{\sqrt{2k\pi}}^{\sqrt{(2k+1)\pi}} \sin(x^2)dx = \sum_{k=1}^\infty \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}du \\ \ge & \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2\sqrt{(2k+1)\pi}} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin u du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{2k+1}} = \infty \end{aligned}$$

따라서 $\int_0^\infty |\sin(x^2)|dx$ 는 존재하지 않는다. □

7. 단위벡터 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 에 대하여 $n \times n$ 행렬 $X = (x_{ij}),\ x_{ij} = \delta_{ij} + a_i a_j$ 의 행렬식을 계산하여라. 여기에서 δ_{ij} 는 $i = j$ 일 때에는 1, $i \neq j$ 일 때에는 0 을 나타낸다.

[풀이] 행렬 $A = (a_i a_j)$ 는 다음과 같이 표시된다.

$$(a_i a_j) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix} (a_1 \cdot \cdot a_n)$$

그러므로, n 차원 벡터 $\mathbf{x} =^t (x_1, \cdots, x_n)$ 에 대하여

$$(a_i a_j)(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix} (a_1 \cdot \cdot a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\mathbf{a}$$

즉, 행렬 A 는 벡터 $\mathbf{a}$ 가 생성하는 1차원 벡터공간으로의 정사영을 나타낸다. 이제, 벡터 $\mathbf{a}$ 를 포함하는 정규직교기저를 택하여 이 기저에 대해 주어진 행렬 X 를 다시 나타내면 대각원소를 제외한 모든 원소는 0이고 대각원소 중에서는 한 원고만 2 이고 나머지 대각원소는 모두 1인 대각행렬로 표시된다. 따라서 구하는 행렬식 값은 2 이다. □

8. 함수 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 에 대하여 $\int_0^\infty h(t)dt = 1$ 일 때, 적분 $\iint_{\mathbb{R}^2} h(x^2 + 2xy + 5y^2)dA$ 를 계산하여라.

[풀이] $u = x + y, v = 2y$ 라 하면 $x^2 + 2xy + 5y^2 = (x + y)^2 + 4y^2 = u^2 + y^2$ 이므로 변수변환공식에 의하여

$$\iint_{\mathbb{R}^2} h(x^2 + 2xy + 5y^2)dA = \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^2} h(u^2 + v^2)dudv.$$

이제 $u = r\cos\theta, v = r\sin\theta$ 라고 하면 다시 변수변환공식에 의하여

$$\iint_{\mathbb{R}^2} h(u^2 + v^2)dudv = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty h(r^2)rdrd\theta.$$

이제 $r^2 = t$ 라고 하면

$$\int_0^\infty h(r^2)rdr = \frac{1}{2} \int_0^\infty h(t)dt = \frac{1}{2}$$

이므로 구하는 적분값은 $\frac{\pi}{2}$. □

9. 교대급수 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$ 에 대하여 다음 규칙에 따라서 더하는 순서를 바꾸어 얻는 급수를 $\sum a_k$ 라 하자.

규칙: 부호가 같은 항들 사이의 순서는 바뀌지 않는다.

예를 들어서, $1 + 1/3 - 1/2 - 1/4 + \cdots$ 는 허용되지만, $1 - 1/4 + 1/3 - 1/2 + \cdots$ 는 허용되지 않는다. 이제 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 중에서 양의 항의 개수를 p_n, 음의 항의 개수를 q_n 이라고 할 때,

(1) 급수 $\sum a_k$ 가 수렴하기 위한 필요충분조건이 극한값 $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n}$ 이 존재하는 것임을 보이고

(2) 이 극한값을 α 라고 할 때, $\sum a_k = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\alpha$ 임을 보여라.

[풀이]

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{2k}$$

그런데

$$\sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2p_n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{k}.$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{2p_n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{2k}$$

이때, $1 + \frac{1}{2} + \cdot + \frac{1}{n} = H_n$ 이라 하면, $\sum_{k=1}^{n} a_k = H_{2p_n} - \frac{1}{2}H_{p_n} - \frac{1}{2}H_{q_n}$. 그런데 $\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdot + \frac{1}{n} - \ln\, n \to \gamma$ 이므로

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{2p_n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{2k} \\
&= (\ln(2p_n) - \gamma_{2p_n}) - \frac{1}{2}(\ln p_n - \gamma_{p_n}) - \frac{1}{2}(\ln q_n - \gamma_{q_n}) \\
&= \ln 2 + \frac{1}{2}\ln(p_n/q_n) - \gamma_{2p_n} + \frac{1}{2}\gamma_{p_n} + \frac{1}{2}\gamma_{q_n}
\end{aligned}$$

그러므로 $n \to \infty$ 일 때, 위의 값은 $\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\alpha$ 로 수렴한다. □

제 2 차 문제 (제 2 분야)

6. 적분 $\int_{-\pi}^{\pi} \ln|\sin(\theta/2)|d\theta$ 를 계산하여라.

[풀이] $2\phi = \theta$ 라고 하면

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \ln|\sin(\theta/2)|d\theta &= 2\int_0^{\pi} \ln\sin(\theta/2)d\theta = 4\int_0^{\pi/2} \ln\sin\phi d\phi \\ &= 2[\int_0^{\pi/2} \ln\sin\phi d\phi + \int_0 \pi/2 \ln\cos\phi d\phi]\end{aligned}$$

그런데

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi/2} \ln\sin\phi d\phi \\ =& \int_0 \pi/2 \ln\cos\phi d\phi = 2\int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(2\phi)}{2}\right) d\phi \\ =& 2\int_0^{\pi/2} [\ln(1/2) + \ln\sin(2\phi)]d\phi = \pi\ln(1/2) + 2\int_0^{pi/2} \ln\sin t dt\end{aligned}$$

그러므로

$$2\int_0^{\pi/2} \ln\sin\phi d\phi = \pi\ln(1/2)$$

이고 따라서 구하는 적분값은

$$\pi\ln(1/2) + \pi\ln(1/2) = 2\pi\ln(1/2).$$

□

7. 단위벡터 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 에 대하여 $n \times n$ 행렬 $X = (x_{ij})$, $x_{ij} = \delta_{ij} + a_i a_j$ 의 행렬식을 계산하여라. 여기에서 δ_{ij} 는 $i = j$ 일 때에는 1, $i \neq j$ 일 때에는 0 을 나타낸다.

[풀이] 1분야 7번 풀이와 같음. □

8. 함수 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 에 대하여 $\int_0^{\infty} h(t)dt = 1$ 일 때, 적분 $\iint_{\mathbb{R}^2} h(x^2 + 2xy + 5y^2)dA$ 를 계산하여라.

[풀이] 1분야 8번 풀이와 같음. □

9. 급수 $1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{6n-5}-\frac{1}{6n-1}+\cdots$ 를 계산하여라.

[풀이]

$$f(x)=x-\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots+\frac{x^{6n-5}}{6n-5}-\frac{x^{6n-1}}{6n-1}+\cdots$$

를 생각하자 이 급수는 $|x|<1$ 에서 절대수렴하므로 무한급수의 항을 재배열할 수 있고 따라서

$$f(x)=\left(x+\frac{x^7}{7}+\cdots+\frac{x^{6n-5}}{6n-5}+\cdots\right)-\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^11}{11}+\cdots+\frac{x^{6n-1}}{6n-1}+\cdots\right)$$

$0<x<1$ 에 대하여

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1+x^6+\cdots+x^{6n-6}+\cdots)-(x^4+x^{10}+\cdots+x^{6n-2}+\cdots) \\ &= \frac{1}{1-x^6}-\frac{x^4}{1-x^6}=\frac{1+x^2}{1+x^2+x^4} \end{aligned}$$

한편 $f(0)=0$ 이므로

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

이다. f 의 급수표현은 $x=1$ 에서 수렴하므로 Abel의 극한정리에 의해 원래의 급수는

$$f(1)=\frac{1}{\sqrt{3}}[\arctan(1/\sqrt{3})+\arctan\sqrt{3}]=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

에 수렴한다. $\square$