1 p^4-5p^2+9 가 소수가 되는 소수 p의 개수는 얼마인가?

sol)

$$(\text{준식})=f(p)=(p^2-1)(p^2-4)+5$$
$$=(p-2)(p-1)(p+1)(p+2)+5$$

I) $p=5k+1$ 이면

p 가 소수일려면 $k>0$ 이므로, $f(p)$ 는 5보다 큰 5의 배수이다. $\therefore 0$ 개

II) $p=5k+2$ 이면

① $k=0$

$p=2$ 이므로 $f(p)=5$ 이다. $\therefore$ 1개

② $k>0$

$f(p)$ 는 5보다 큰 5의 배수이다. $\therefore 0$ 개

III) $p=5k+3$ 이면

① $k=0$

$p=3$ 이므로 $f(p)=45$ 이므로 소수가 아니다. $\therefore$ 0개

② $k>0$

$f(p)$ 는 5보다 큰 5의 배수이다. $\therefore 0$ 개

IV) $p=5k+4$ 이면

$f(p)$ 는 5보다 큰 5의 배수이다. $\therefore 0$ 개

V) $p=5k$ 이면

p 가 소수일려면 $k=1$ 이므로, $f(p)=509$ 이므로 소수다. $\therefore$ 1개

I), II), III), IV), V)에서 총 개수는 2 개 이다.

2 10000을 연속되는 두 개 이상의 자연수의 합으로 나타낼 수 있는 경우의 수는 얼마인가? (단 더 하는 순서는 무시한다.)

sol)

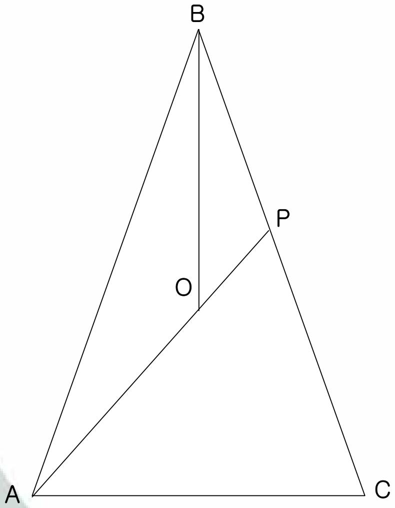
연속한 n 개의 자연수를 $a+1,\ a+2, \cdots,\ a+n\ \ (a,\ n \in \mathbb{N})$ 이라 두자.
그러면 연속한 n 개의 자연수의 합은
$na + \frac{n(n+1)}{2} = 10000$ 이고 식을 변형하면,
$n(n+2a+1) = 2^5 \cdot 5^4$

I) n 이 짝수이면
$2 \nmid n+2a+1$ 이므로
$n = 2^5 \cdot 5^k,\ \ n+2a+1 = 5^{4-k}\ \ (k=0,1,2,3,4)$ 가 된다.
그런데 $n < n+2a+1$ 이므로
$2^5 \cdot 5^k < 5^{4-k}$
$2^5 < 5^{4-2k}$
$\therefore\ k=0,\ \ n=2^5$

II) n 이 홀수이면
$n = 5^k,\ \ n+2a+1 = 2^5 \cdot 5^{4-k}\ \ (k=0,1,2,3,4)$ 가 된다.
$n+2a+1 = 5^k + 2a + 1 = 2^5 \cdot 5^{4-k}$
$2a = 2^5 \cdot 5^{4-k} - 5^k - 1$
$a = 2^4 \cdot 5^{4-k} - \frac{5^k+1}{2}$
$\frac{5^k+1}{2} \in \mathbb{Z}$ 이므로 $a \in \mathbb{Z}$
a 가 자연수 또는 0 이 되려면
$5^k < 2^5 \cdot 5^{4-k}$
$5^{2k-4} < 2^5$
$\therefore\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3$
그런데 $k=0$ 이면 $n=1$ 이므로 문제조건에 맞지 않는다.
$\therefore\ n=5,\ 5^2,\ 5^3$

I), II)에서 n 의 개수는 4 개이다.

3 $\overline{AB} = \overline{BC}$인 예각 이등변삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 3이다. 점 A와 외접원의 중심 O를 잇는 직선과 변 BC와의 교점 P에 대하여 $\overline{AP} = \frac{21}{4}$일 때, 선분 AB의 길이의 제곱은 얼마인가?



sol)

$\angle ABO = \angle OAB = \theta$ 라 두자.

$\triangle ABP$ 에서

$$\frac{\overline{BP}}{\sin\theta} = \frac{\overline{AP}}{\sin 2\theta} \quad (\angle BAP = \theta,\ \angle ABP = 2\theta)$$

$$\overline{BP} = \frac{\sin\theta}{\sin 2\theta}\overline{AP}$$

$\triangle ACP$ 에서

$$\frac{\overline{CP}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)} = \frac{\overline{AP}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} \quad \left(\angle PAC = \frac{\pi}{2} - 2\theta,\ \angle PCA = \frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\overline{CP} = \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}\overline{AP}$$

그런데, $\overline{BP} + \overline{CP} = \overline{BC} = \overline{AB}$ 이므로,

$$\overline{BP} + \overline{CP} = \left(\frac{\sin\theta}{\sin 2\theta} + \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}\right)\overline{AP} = \overline{AB} = 2\overline{BO}\cos\theta$$

$\overline{BO} = 3,\ \overline{AP} = \frac{21}{4}$ 를 대입하여 정리하면

$$8\cos\theta = \frac{7}{2\cos\theta} + \frac{7\cos 2\theta}{\cos\theta}$$

$$16\cos^2\theta = 7 + 14(2\cos^2\theta - 1)$$

$$\cos^2\theta = \frac{7}{12}$$

$$\therefore\ \overline{AB}^2 = 4\cos^2\theta \times 9 = 21$$

4 다음 식을 만족시키는 a, b에 대하여 $\sin^2(a+b)$의 값을 기약분수 $\frac{n}{m}$으로 나타낼 때, $10m+n$의 값을 구하여라.

$$\sin a + \sin b = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos a + \cos b = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

sol)

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\therefore\ \tan\frac{a+b}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin(a+b) = 2\frac{\tan\frac{a+b}{2}}{1+\tan^2\frac{a+b}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin^2(a+b) = \frac{3}{4}$$

5 회원이 7명인 어느 동아리의 구성원을 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7로 나타내기로 하자. 이 동아리에는 3명씩으로 구성된 네 개의 위원회 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4\}$, $C=\{3,4,5\}$, $D=\{1,2,4\}$가 있다. 각 위원회에 한 명씩을 추가하여 4명으로 구성할 때, 새로 구성된 어느 두 위원회의 구성원도 완전히 일치하지는 않도록 추가하는 방법의 수는 얼마인가? (단, 같은 사람을 두 개 이상의 위원회에 추가할 수도 있다.)

sol)

A에 추가될 수 있는 인원은 $4, 5, 6, 7$ 이며 $5, 6, 7$ 이 추가 될 경우에는 A는 어느 위원회와도 겹치지 않는다.

I) A에 $5, 6, 7$ 이 추가될 경우

① B에 1이 추가될 경우

D와는 1가지 경우 겹치고 C와는 겹칠 수 없다. $\therefore$ 12가지

② B에 5가 추가될 경우

C와는 1가지 경우 겹치고 D와는 겹칠 수 없다. $\therefore$ 12가지

③ B에 6 또는 7이 추가될 경우

어떤 경우도 C, D와 겹치지 않는다. $\therefore$ 32가지

①, ②, ③에서 각각의 A에 대한 경우의 수이므로 총 경우의 수는

$3\times(12+12+32)=168$ 가지 이다.

II) A에 4가 추가될 경우

① B에 1이 추가될 경우

B는 A와 겹친다. $\therefore$ 0가지

② B에 5가 추가될 경우

C에는 $1, 6, 7$이 올 수 있고, D에는 $5, 6, 7$이 올 수 있다. $\therefore$ 9가지

③ B에 6 또는 7이 추가될 경우

C에는 $1, 2, 6, 7$이 올 수 있고, D에는 $5, 6, 7$이 올 수 있다. $\therefore$ 24가지

①, ②, ③에서 총 경우의 수는 33가지이다.

I), II)에서 전체 경우의 수는 $168+33=201$ 가지이다.

6

자연수 m, n이 식 $2m^2+2n^2=137(m-n)$을 만족시킬 때, $m+n$의 값은 얼마인가?

sol)

$2m^2+2n^2=137(m-n) > 0$ 이므로 $m-n>0$
$2 \mid m-n$ 이므로 ($\because 2 \mid 137(m-n),\ 2 \nmid 137$)
$m-n=2k$ ($k \in \mathbb{N}$) 이라 두자.

$2m^2+2n^2=2\cdot 137\cdot k$ 에 $m=2k+n$ 을 대입하여 정리하면
$(2k+n)^2+n^2=137\cdot k$
$4k^2+4nk+2n^2=137\cdot k$ 이므로 k 는 2 의 배수이다.
$\therefore\ k=2t\ (t \in \mathbb{N})$

$m=n+4t$ 를 처음식에 대입하여 정리하면

$2(n+4t)^2+2n^2=4\cdot 137\cdot t$
$n^2+4nt+8t^2=137t$
$(n+2t)^2=t(137-4t)$
$(t,\ 137-4t)=(t,\ 137)=1$ or 137 인데 $(t,\ 137)=137$ 이면
$t(137-4t)=(n+2t)^2<0$ 이 되므로
$(t,\ 137)=(t,\ 137-4t)=1$ 이다.

$\therefore\ t=x^2,\ 137-4t=y^2$ (x, y는 서로소인 자연수)

$137-4t=137-4x^2=y^2$
$137=4x^2+y^2$
x가 6 이상이면, $4x^2+y^2$이 137 보다 크므로, x는 5이하이어야 한다. $x=1,2,3,4,5$를 대입하여 성립하는 경우를 찾으면
$x=2$, $y=11$을 얻게 된다.

$t=x^2, k=2t, m-n=2k, (n+2t)^2=t(137-4t)$을 이용하여 m, n 값을 얻게 된다.

$\therefore$ $m=30$ $n=14$

7 부등식 $\sqrt{a}+\sqrt{b} \leqq c$ 을 만족시키는 모든 실수 a, b (단, $0 \leq a,\ b \leq 1$)에 대하여, 다음 연립방정식이 실수 해를 갖도록 하는 실수 c의 최대값은 얼마인가?

$$\begin{cases} a=(1-x)y \\ b=(1-y)x \end{cases}$$

sol)

$$a=(1-x)y$$
$$b=(1-y)x$$

$$a-b=y-x$$
$$y=x+a-b$$

마지막 식을 첫 번째 식에 대입하면, $a=(1-x)(x+a-b)$ x가 실근을 가지기 위해서는 판별식

$$D=(a-b-1)^2-4b \geqq 0$$

을 만족해야 한다.

$(a-b-1)^2 \geqq (2\sqrt{b})^2$

$|a-b-1| \geqq 2\sqrt{b}$

그런데 $-1 \leqq b-a <= 1$이므로 $0 \leqq 1+b-a \leqq 2$ 이다. 따라서 위의 부등식은 아래와 같이 쓸 수 있다.

$b-a+1 \geqq 2\sqrt{b}$

$(\sqrt{b}-1)^2 \geqq a \geqq 0$

$1-\sqrt{b} \geqq \sqrt{a}$

$\sqrt{a}+\sqrt{b} \leqq 1$ 이다. 이 조건은 판별식의 필요조건일 뿐만 아니라 충분조건이므로, 실수해를 가지기 위한 c의 최대값은 1 이다.

8 1, 2, 3, 4를 사용하여 만든 9자리의 자연수 중에서 다음 조건을 만족시키는 것의 개수는 얼마인가?

㈎ 최고 자리 수는 1이다.
㈏ 같은 숫자가 연속하여 나타나지 않는다.
㈐ 일의 자리 수는 1이 아니다.

(sol)
각 자리 수에 나올 수 있는 수는 1,2,3,4 뿐이므로 각자리수 별로 1,2,3,4가 나오는 경우의 수를 아래와 같이 표로 만들자.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0	3	6	21	60	183	546	1641
2	0	1	2	7	20	61	182	547	1640
3	0	1	2	7	20	61	182	547	1640
4	0	1	2	7	20	61	182	547	1640

같은 숫자가 연속해서 나올 수 없으므로, 자리수가 넘어갈 때 어떤 수가 나오는 경우의 수는 바로 전의 자리수의 다른 수들의 경우의 수의 합과 같다.

아홉 번째의 일의 자리 수에서 1이 나오는 경우를 제외하면 $1640 \times 3 = 4920$

9 다음 조건을 만족시키는 자연수 m의 최소값은 얼마인가?

모든 사람이 각각 m명 이상을 알고 있는 30명의 사람 중에는 모두 서로 아는 4명의 그룹이 항상 있다. (단, a가 b를 알면 b도 a를 알고 있다.)

(sol)

서로 서로 알고 있는 p명의 사람들의 그룹을 K_p라고 쓰자. 그리고 집합 A의 원소의 개수를 $n(A)$라고 쓰자. 그러면 문제는 K_4가 존재하는가에 최소 m을 구하는 문제이다.

우선 각자가 20명을 알고 있을 때, K_4가 존재하지 않는 경우를 하나 찾고, 21명을 알고 있으면 K_3가 반드시 존재함을 보이고 이를 이용하여 K_4가 존재함을 보이자.

(i) 30명을 10명 씩인 그룹 S_1, S_2, S_3 로 나누자. S_1의 사람은 각각 S_2와 S_3의 사람(20명)만 알고 있다. 마찬가지로 S_2에 속하는 사람은 S_1, S_3의 사람만 알고 있다. 이렇게 되면 각각의 사람은 모두 20명씩 알고 있지만, K_4는 존재하지 않는다. 왜냐하면 K_4가 존재한다면 그 네 명중의 두 명은 어떤 S_i에 포함되어 있어야 하는데 같은 S_i에 속하는 사람은 서로 서로를 모르기 때문이다.

(ii) 한 사람이 21명을 알고 있다고 하자. 그러면 K_3는 반드시 존재하게 된다.

A가 알고 있는 21명을 $B_i(1 \leqq i \leqq 21)$라고 하자. 그런데 B_i가 21명을 알고 있으므로 B_j $(1 \leqq j \leqq 21)$중에서 적어도 12명을 알아야 한다. 따라서 K_3가 존재하게 된다.

(iii) 한 사람이 21명을 알고 있다면 K_4가 반드시 존재한다.

(ii)에서 찾은 K_3의 사람을 각자 a, b, c라고 하자. 그리고 K_3를 제외한 나머지 사람들의 집합을 K라고 하고 집합 A, B, C를 아래와 같이 정의하자.

$$A = \{x \in K \mid a\text{가 알고 있는 사람}\}$$
$$B = \{x \in K \mid b\text{가 알고 있는 사람}\}$$
$$C = \{x \in K \mid c\text{가 알고 있는 사람}\}$$

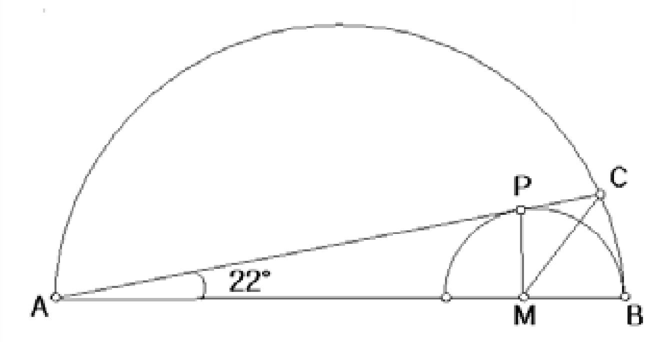
그러면

$$n(A) = n(B) = n(C) = 19$$
$$n(A \cup B \cup C) = 27$$
$$n(A \cup B) \leqq 27 \quad n(B \cup C) \leqq 27 \quad n(C \cup A) \leqq 27$$

$$\begin{aligned} n(A \cap B \cap C) &= n(A \cup B \cup C) - n(A \cup B) - n(B \cup C) - n(C \cup A) + n(A) + n(B) + n(C) \\ &= 27 + 19 + 19 + 19 - n(A \cup B) - n(B \cup C) - n(C \cup A) \\ &\geqq 27 + 19 + 19 + 19 - 27 - 27 - 27 = 3 \end{aligned}$$

$A \cap B \cap C$ 가 공집합이 아니므로 즉 K에 a, b, c 를 모두 알고 있는 사람이 존재한다. 이 사람과 a, b, c를 연결하면 K_4를 얻게 된다. 따라서 각자가 21명을 알고 있으면 반드시 K_4가 존재한다.

10 지름이 $\overline{AB}$인 원에서 $\angle CAB = 22^\circ$인 현 AC를 긋자. 주어진 원에 점 B에서 내접하고, 현 AC에도 접하는 작은 원을 그린다. 작은 원과 직선 AC의 접점 P에서 선분 AB에 그은 수선의 발을 M이라 할 때, $\angle CMB$의 크기는 얼마인가?



(sol)

$\angle CPB = \frac{1}{2} \angle POB$

$\angle CBP = 90^o - \angle CPB = \frac{1}{2}(180^o - \angle POB)$

$= \angle PBM$ ($\because$ $\triangle POB$는 이등변 삼각형)

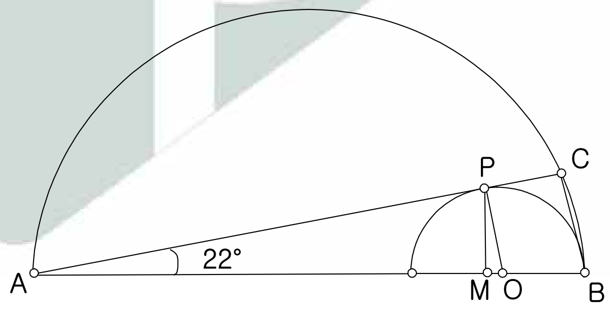
$\therefore \triangle PBM \equiv \triangle PBC$ (RHA 합동)

$\overline{PM} = \overline{PC}$

$\angle PMC = \frac{1}{2}(180^o - \angle MPC)$

$= \frac{1}{2}(180^o - 112^o) = 34^o$

$\therefore \angle CMB = 90^o - \angle PMC = 56^o$



11 음이 아닌 정수 n에 대하여 $f(n) = 2004^n$이라 하자. $f(0)$, $f^2(0)$, $f^3(0)$, $\cdots$을 11로 나눈 나머지들로 이루어진 집합을 S라 하자. 이 때, 집합 S의 모든 원소의 합을 구하여라. (단, f^k는 f를 k번 합성한 함수이다.)

(sol)

$f(0) = 2004^0 = 1$

$f^2(0) = f(1) = 2004^1 = 2004$

$f^3(0) = f(2004) = 2004^{2004}$

$f^k(0) = f(f^{k-1}(2004)) = 2004^{2004^{\cdot^{\cdot^{2004}}}}$ (2004가 $k-1$개)

(i) $k = 0$

$1 \equiv 1 \ (\mathrm{mod} \ \ 11)$

(ii) $k = 1$

$2004 \equiv 2 \ (\mathrm{mod} \ \ 11)$

(iii) $k = 2$

페르마의 작은 정리에서 $2^{10} = 1\ (mod \ \ 11)$이므로,

$2004^{2004} \equiv 2^{2004} \equiv 2^4 \equiv 5 \ (\mathrm{mod} \ \ 11)$

(iv) $k \geqq 3$

$2004^{2004^{\cdot^{\cdot^{2004}}}} \equiv 0 \ \ (mod \ \ 2)$ 이므로,

$2004^{2004^{\cdot^{\cdot^{2004}}}} \equiv 2^{2004^{2t}} \equiv 2^{4^{2t}} \equiv 2^{6^t} \equiv 2^6 \equiv 9 \ (\mathrm{mod} \ \ 11)$

($\because \ 2^{10} = 1\ (mod \ \ 11)$)

$S = \{1, 2, 5, 9\}$

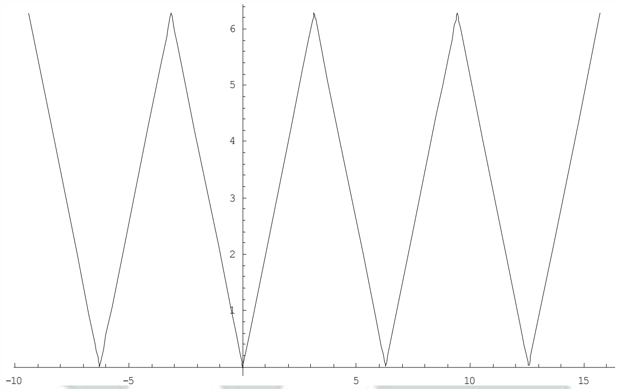
$1 + 2 + 5 + 9 = 17$

12 함수 $f(x)=\sin x$와 다음과 같이 정의된 주기가 2π인 함수 $g(x)$에 대하여, 방정식 $(f\circ g)(x)=\dfrac{x}{2\pi}$의 실근의 개수를 구하여라.

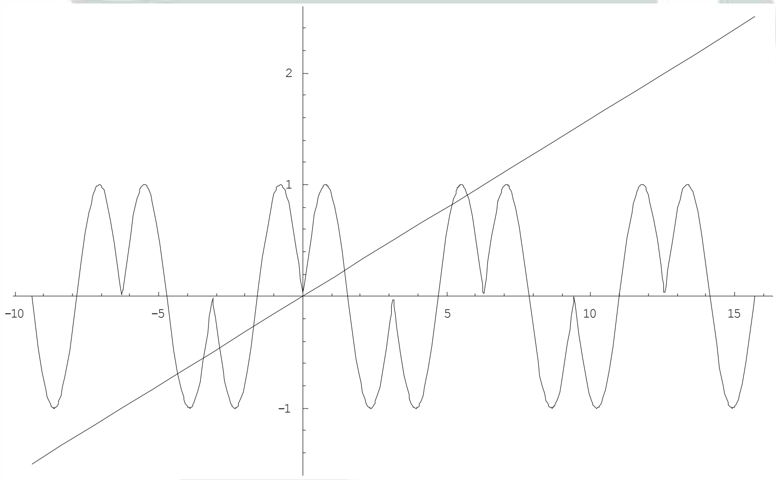
$$g(x)=\begin{cases} 2x, & 0\leqq x\leqq \pi \\ 4\pi-2x, & \pi< x\leqq 2\pi \end{cases}$$

(sol)

(i) $g(x)$의 그래프는 아래와 같다. 그래프에서 최대값은 2π 이고, x축과의 교점은 $\cdots,-2\pi,0,2\pi,4\pi,\cdots$ 이다.



(ii) $f(g(x))$의 그래프는 아래와 같다. $h(x)=\dfrac{x}{2\pi}$라 두고, $f(g(x))$와 $h(x)$의 교점을 찾으면 된다.



$\therefore 8$개

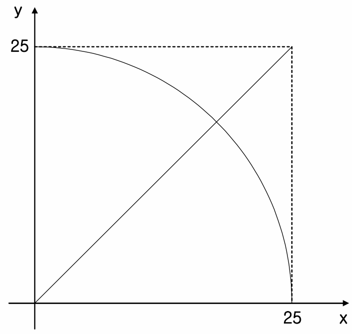
13 양수 a, b에 대하여 식 $a^2+b+\frac{9}{a+b+1}$의 최소값을 기약분수 $\frac{n}{m}$으로 나타낼 때, $10m+n$의 값을 구하여라.

$$\begin{aligned} a^2+b+\frac{9}{a+b+1} &= a^2-a-1+a+b+1+\frac{9}{a+b+1} \\ &\geqq (a-\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}+2\sqrt{(a+b+1)\cdot\frac{9}{a+b+1}} \\ &\geqq -\frac{5}{4}+6=\frac{19}{4} \end{aligned}$$

$a=\frac{1}{2}$ 과 $b=\frac{3}{2}$에서 두 개의 부등식의 등호 조건을 만족한다. 따라서 최소값 $\frac{19}{4}$를 가진다.

14 내접하는 원이 그려져 있는 정사각형의 가로와 세로를 각각 50등분하여 2500개의 작은 정사각형으로 나누었다. 원주의 일부다 내부에 그려져 있는 작은 정사각형의 개수를 구하여라.

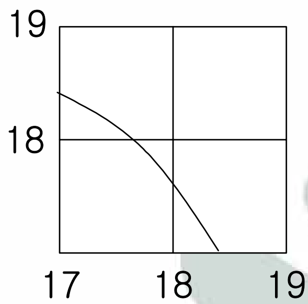
sol)



$x^2+y^2=25^2$ 그래프를 좌표축에 그리자. 이 때 1 사분면의 개수를 구한 후 4 를 곱해주면 된다.

I) $y=x$ 에 대응하는 $x^2+y^2=25^2$ 의 좌표는 $\left(\frac{25}{\sqrt{2}}, \frac{25}{\sqrt{2}}\right)$

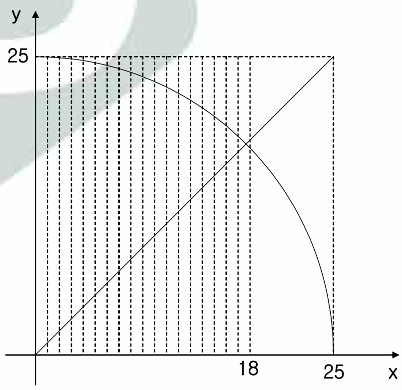
$17<\frac{25}{\sqrt{2}}<18$ 이므로 그 부분만 보면



왼쪽 그림과 같이 된다. 따라서 왼쪽 그림의 왼쪽 아래칸을 제외한 나머지 부분은 $y=x$ 에 대하여 대칭이 된다. 이제 $y=x$ 의 윗부분의 개수를 구하자.

II) $x \leqq 18$ 에서 모든 부분의 기울기가 -1 보다 크기 때문에 세로로 3칸 이상 원의 일부분을 포함하는 경우는 없다.

III) 우선 $0 \leqq x \leqq 18$ 에서 모든 세로 칸마다 원의 일부를 포함하는 정사각형이 적어도 한개씩은 존재한다. 각 세로칸에서 정사각형 두 개가 원의 일부를 포함하는 경우를 찾아주면 된다. $18 \leqq y \leqq 25$ 에서 $y=19,\ 21,\ 22,\ 23$ 의 아래 위로 두 개의 정사각형이 원의 일부를 포함하게 된다. $y=20,\ \ 24$ 의 경우는 $(15, 20)$, $(7, 24)$ 로 격자점이 되므로 세로로 두칸의 정사각형이 존재하지 않는다.



I), II), III)에서 1 사분면의 정사각형의 개수는 $(18+4)\times 2+1=45$ 개

$\therefore$ 180 개

15 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_{2002}+a_{2003}+a_{2004}$의 값을 구하여라.

(가) $a_1=a_2=a_3=a_4=1,\quad a_5=2,$
(나) $a_{n+5}=\dfrac{a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+a_{n+4}}{a_na_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}a_{a+4}-1}\quad (n\geq 1)$

sol)

$$a_6=\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{a_1a_2a_3a_4a_5-1}=6$$

마찬가지로 계산해보면

$$a_7=a_8=a_9=a_{10}=1$$

$$a_{11}=2$$

$$a_{12}=6$$

$\therefore\ k\geq 1$일 때, $a_{6k}=6=a_{2004}$

$a_{2003}=2,\ a_{2002}=1$

$\therefore\ a_{2002}+a_{2003}+a_{2004}=9$

16 상수 함수가 아닌 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

㈎ 실수 x에 대하여 $(x^6-x^5+x^3-x+1)f(x^4)=f(x)$이다.
㈏ 실수 x와 y에 대하여 $f(x+y)=\dfrac{f(x)f(y)}{(2xy-1)f(x)f(y)+f(x)+f(y)}$이다.

$f(x)$의 최대값을 기약분수 $\dfrac{n}{m}$으로 나타낼 때 $10m+n$의 값은?

sol)

(i) 모든 x에 대해서 $f(x)\neq 0$

(증명) 모든 실수에 대해서 (나)가 의미를 가지기 위해서는 분모가 0 이 아니어야 한다. 그런데 만약 $f(a)=0$ 이라면 $x=y=a$을 대입하면, 분모가 0 이 되어서 모순이다. 따라서 모든 x에 대해서 $f(x)\neq 0$이다.

(ii) (나)에 $x=y=0$을 대입하고 $a=f(0)$라고 하자.

$a=\dfrac{a^2}{-a^2+2a}$ $\quad -a^3+2a^2=a^2$ 따라서 $f(0)=a=1$ 이다.

(나)에 $y=-x$를 대입하면,

$$f(0)=1=\frac{f(x)f(-x)}{(-2x^2-1)f(x)f(-x)+f(x)+f(-x)}$$

역수를 취하면, $2+2x^2=\dfrac{1}{f(x)}+\dfrac{1}{f(-x)}$을 얻을 수 있다.

(가)에서

$f(x)=(x^6-x^5+x^3-x+1)f(x^4)$이고

$f(-x)=(x^6+x^5-x^3+x+1)f(x^4)$이다. 이를 대입하면

$$f(x^4)(2+2x^2)=\frac{1}{(1-x+x^2)(1-x^2+x^4)}+\frac{1}{(1+x+x^2)(1-x^2+x^4)}=\frac{2x^2+2}{x^8+x^4+1}$$

$$f(x^4)=\frac{1}{x^8+x^4+1}$$

(가)에 의해서

$$f(x)=(x^6-x^5+x^3-x+1)\frac{1}{x^8+x^4+1}$$
$$=(1-x+x^2)(1-x^2+x^4)\frac{1}{(1-x^2+x^4)(1+x^2+x^4)}=\frac{1}{x^2+x+1}$$

따라서 최대값은 4/3이다.

17 다음 방정식을 만족시키는 2004보다 크지 않은 자연수의 쌍 (x, y)의 개수를 구하여라. (단, $[t]$는 t를 넘지 않는 가장 큰 정수이다.)

$$\left[\frac{x^2}{y}\right]+\left[\frac{y^2}{x}\right]=\left[\frac{x^2+y^2}{xy}\right]+xy$$

sol)

I) Case $y=x$

$LHS = x+y=2x$

$RHS=2+x^2$

$\therefore\ x^2+2=2x$

$x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0$ 이므로 만족하는 x, y 해는 없다.

II) $y>x\geqq 1$

$x\geqq [x]>x-1\ \ (\because\ x\geqq 0)$

$LHS=\left[\frac{x^2}{y}\right]+\left[\frac{y^2}{x}\right]\leqq \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}$

$RHS=\left[\frac{x^2+y^2}{xy}\right]+xy>xy+\frac{x^2+y^2}{xy}-1$

$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}>xy+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-1$

$x^3+y^3>x^2y^2+x^2+y^2-xy$

$xy+x^2(x-1)+y^2(y-1)>x^2y^2$

$y^2+y^2(y-1)+y^2(y-1)>xy+x^2(x-1)+y^2(y-1)>x^2y^2\ \ (\because y>x\geqq 1)$

$1+2(y-1)>x^2$

$2y-1>x^2$

$\frac{x^2}{y}<2-\frac{1}{y}$

$\left[\frac{x^2}{y}\right]\leqq 1$

$LHS\leqq 1+\frac{y^2}{x}$

$RHS>\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+xy-1$

$1+\frac{y^2}{x}>\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+xy-1$

$xy+y^3>x^2+y^2+x^2y^2-xy$

$2xy+y^3-y^2>(1+x^2)y^2$

$y^3+y^2>2xy+y^3-y^2>(1+x^2)y^2$

$y+1>1+x^2$

$y\geqq x^2+1$ -------------------------------- $(*)$

$LHS=\left[\dfrac{x^2}{y}\right]+\left[\dfrac{y^2}{x}\right]>\dfrac{y^2}{x}-1\ \left(\because \left[\dfrac{x^2}{y}\right]=0\ \ by\ \ (*)\right)$

$RHS\leqq \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+xy$

$\dfrac{y^2}{x}-1\leqq \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+xy$

$y^2-x\leqq \dfrac{x^2}{y}+y+x^2+y<1+x^2y+y\ \ (\ by\ \ (*))$

$y^2-(1+x^2)y<(x+1)\leqq y$

$y<(1+x^2)+1=2+x^2$

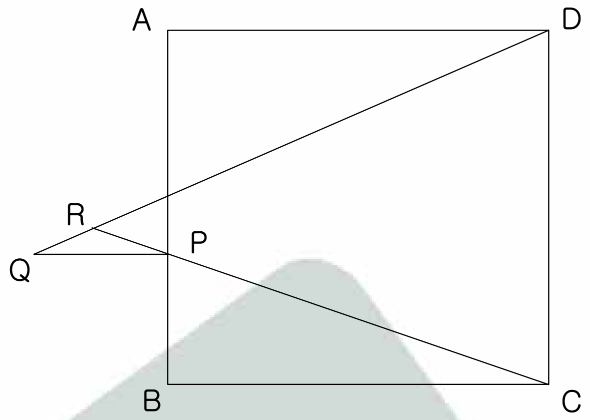
$y<2+x^2$ -------------------------------- $(**)$

$(*)$, $(**)$ 에 의해서 가능한 경우는 $y=x^2+1$ 인 경우 뿐이고 대입하였을 때 성립한다.
$y\leqq 2004$ 조건에 의해서 가능한 경우는 44 개이다.

III) $y<x$ 일 때, II)와 같은 방법으로 가능한 경우는 44개이다.

I), II), III)에서 전체 해의 개수는 88 개이다.

18 한 변의 길이가 13인 정사각형 ABCD에서 $\overline{BP}=6$인 점 P를 변 AB 위에 잡는다. 점 P에서 변 BC에 평행한 직선을 긋고 이 직선 위에 $\overline{QP}=6$이 되도록 점 Q를 사각형 ABCD의 외부에 잡는다. 직선 QD와 직선 PC의 교점을 R라 할 때 삼각형 PQR의 외접원의 반지름의 길이의 제곱을 구하여라.



sol)

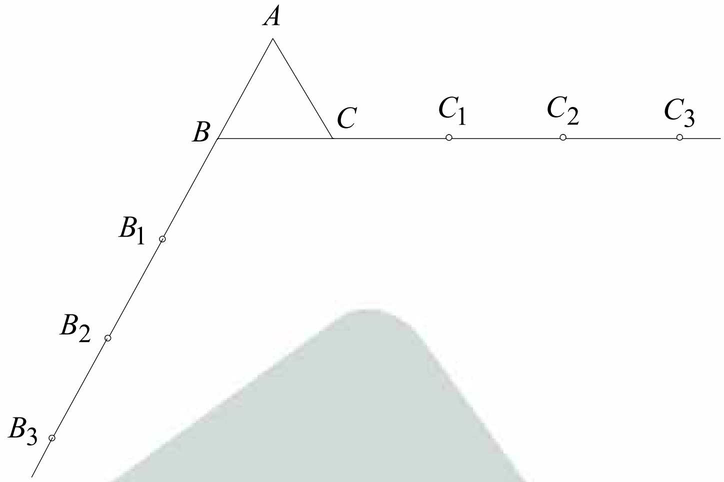
외접원 반지름을 a라 두자.

$\triangle$PQR 에서 사인정리에 의해

$$a = \frac{\overline{PQ}}{2\sin R}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ a^2 &= \frac{9}{\sin^2 R} = 9\csc^2 R = 9\csc^2(\pi - R)\\ &= 9\left(1+\cot^2(\pi-R)\right) = 9\left(1+\cot^2(P+Q)\right)\\ &= 9\left(1+\left(\frac{1-\tan Q\ \tan P}{\tan Q+\tan P}\right)^2\right)\\ &= 18\quad (\because\ \tan P = 6/13,\ \tan Q = 7/19)\end{aligned}$$

19 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC의 변 AB와 BC 각각의 연장선에 간격이 1인 점들이 찍혀 있다. 선분 B_1C_3의 수직이등분선과 선분 B_3C_1의 수직이등분선의 교점을 P 라고 할 때, 선분 BP의 길이를 구하여라.



sol)

원점을 B로 잡고 BC의 연장선을 x축으로 하는 직교 좌표계를 사용하자.

B_1과 C_3를 지나는 직선의 방정식 : $y=\frac{\sqrt{3}}{9}(x-4)$

B_3와 C_1을 지나는 직선의 방정식 : $y=\frac{3\sqrt{3}}{7}(x-2)$

따라서, 선분 B_1C_3의 수직이등분선은 $y=-3\sqrt{3}x+5\sqrt{3}$ 이고, 선분 B_3C_1의 수직이등분선은 $y=-\frac{7}{9}\sqrt{3}x-\frac{5}{9}\sqrt{3}$ 이다.

두 직선의 식을 연립하여 풀면 교점의 좌표는 $(\frac{5}{2},\ -\frac{5}{2}\sqrt{3})$ 이고, 이 때

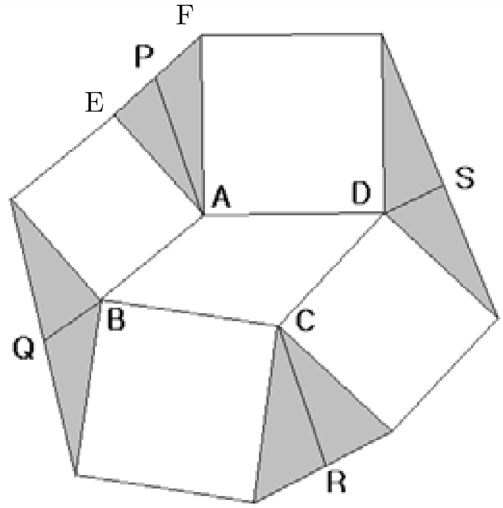
$\overline{\mathrm{BP}}=5$ 이다.

20

다음을 만족시키는 사각형 ABCD가 있다.

$\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=6$, $\overline{CD}=7$, $\cos\angle B=\frac{1}{5}$, $\cos\angle C=-\frac{3}{7}$

그림과 같이 이 사각형의 외부에 정사각형을 그리면 네 개의 빗금친 삼각형을 얻는다. 그림에서 네 선분 AP, BQ, CR, DS는 각각 빗금친 삼각형의 중선이다. 이 네 중선의 길이의 합을 구하여라.



sol)

① $\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\overline{AB}\,\overline{BC}\cos B}=7$

$\overline{BD}=\sqrt{\overline{BC}^2+\overline{CD}^2-2\overline{BC}\,\overline{CD}\cos C}=11$

② $2(\overline{AP}^2+\overline{EP}^2)=\overline{AD}^2+\overline{AB}^2$ ($\because$ 파프스의정리)

$4\overline{AP}^2=2\overline{AD}^2+2\overline{AB}^2-\overline{EF}^2\,(4\overline{EP}^2=\overline{EF}^2)$

$=\overline{AD}^2+\overline{AB}^2+(\overline{AF}^2+\overline{AE}^2-\overline{EF}^2)$

$=\overline{AD}^2+\overline{AB}^2+2\overline{AF}\,\overline{AE}\cos(\pi-A)$

$=\overline{AD}^2+\overline{AB}^2+2\overline{AD}\,\overline{AB}\cos(\pi-A)$

$=\overline{AD}^2+\overline{AB}^2-2\overline{AD}\,\overline{AB}\cos A$

$=\overline{BD}^2$

$\therefore\ \overline{AP}=\frac{\overline{BD}}{2}$

마찬가지로 $\overline{BQ}=\frac{\overline{AC}}{2}$, $\overline{CR}=\frac{\overline{BD}}{2}$, $\overline{DS}=\frac{\overline{AC}}{2}$

$\therefore\ \overline{AP}+\overline{BQ}+\overline{CR}+\overline{DS}=\overline{AC}+\overline{BD}=7+11=18$