

제26회 전국 대학생 수학 경시대회

제 1 차 문제

2007년 11월 3일 (10:00 - 12:00)

1-1 꼭지점의 좌표가 각각 $(0, 0, 0)$, $(1, 2, 3)$, $(3, 1, 2)$, $(7, 4, 7)$ 인 사각형의 넓이를 계산하여라.

1-2 함수 $f(x) = \frac{e^x}{x}$, $1 \leq x \leq 2$ 의 역함수 g 에 대하여 적분 $\int_e^{e^2/2} [g(x)]^2 dx$ 를 계산하여라.

1-3 집합 $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 에 대하여 γ 개의 원소로 이루어진 서로 다른 부분집합을 k 개 선택하려고 한다. 이때, A 의 임의의 원소가, 선택된 k 개의 부분집합 중에서 적어도 p 개의 부분집합에 항상 속하기 위해서는 $k \geq \frac{np}{\gamma}$ 이어야 함을 보여라.

1-4 3차원 공간 \mathbb{R}^3 의 세 단위벡터 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 에 의하여 결정되는 평행육면체의 부피가 $\frac{1}{2}$ 이다. 두 벡터 $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j$ 가 이루는 사잇각이 θ_{ij} 일 때, ij -성분이 $\cos \theta_{ij}$ 인 3×3 행렬 A 의 행렬식의 값을 계산하여라.

1-5 $M_{2 \times 2}$ 는 2×2 행렬들의 이루는 벡터공간이고 $T \in M_{2 \times 2}$ 의 역행렬이 존재한다. 이때, 다음과 같이 정의되는 선형사상 $\Phi : M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}$ 의 행렬식을 계산하여라.

$$\Phi(A) = TAT^{-1}$$

제26회 전국 대학생 수학 경시대회

제 2 차 문제

2007년 11월 3일 (14:00 - 16:00)

2-1 삼각형 ABC 에서 밑변 BC 위의 점 P 에 대하여 $\overline{BP} = x, \overline{BC} = l$, 삼각형의 높이는 $h, \angle APC = \theta(x)$ 라고 할 때, 다음을 보여라.

$$\angle A = \frac{1}{h} \int_0^l \sin^2 \theta(x) dx$$

2-2 실수 행렬 A, B 에 대하여 $A = S^{-1}BS$ 를 만족시키는 복소수 행렬 S 가 존재하면, $A = R^{-1}BR$ 를 만족시키는 실수 행렬 R 가 존재함을 보여라.

2-3 $a_1 > 0, a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 2$ 임을 보여라.

2-4 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$ 인 수열 a_n 에 대하여 다음이 성립함을 보여라.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k \left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right) = 1$$

2-5 사상 $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 가 다음 조건을 만족한다.

[조건] 넓이가 1인 임의의 삼각형 \triangle 에 대하여 $F(\triangle)$ 도 넓이가 1인 삼각형이다.

이때, 임의의 직선 l 에 대하여 $F(l)$ 도 직선임을 보여라.