제27회 전국 대학생 수학 경시대회 문제 풀이

1-1 꼭지점의 좌표가 $(0,1,0),(1,2,1),(1,3,3),(3,2,1)$ 인 사면체의 부피를 구하여라.

풀이 : $(1,2,1)-(0,1,0) = (1,1,1), (1,3,3)-(0,1,0) = (1,2,3), (3,2,1)-(0,1,0) = (3,1,1)$ 이므로 구하는 부피는

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}.$$

1-2 $0 < a,b,c,d < 1$ 일 때, 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\begin{aligned}\sqrt{(1-ab)(1-cd)} \geq & \sqrt{ac(1-b)(1-d)} + \sqrt{bd(1-a)(1-c)} \\ & + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)}\end{aligned}$$

풀이 : 다음과 같은 두 개의 3차원 벡터를 생각하자.

$$X = \begin{bmatrix} \sqrt{a}\sqrt{1-b} \\ \sqrt{b}\sqrt{1-a} \\ \sqrt{1-a}\sqrt{1-b} \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} \sqrt{c}\sqrt{1-d} \\ \sqrt{d}\sqrt{1-c} \\ \sqrt{1-c}\sqrt{1-d} \end{bmatrix}$$

그러면 $\langle X,Y\rangle =$ 우변, $\langle X,X\rangle = (1-ab),\ \langle Y,Y\rangle = (1-cd)$이고 $|\langle X,Y\rangle| \leq \langle X,X\rangle^{\frac{1}{2}}\langle Y,Y\rangle^{\frac{1}{2}}$ 이므로 주어진 부등식이 성립한다.

1-3 다음 적분을 계산하여라.

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\,dx$$

풀이 : $\int_1^2 e^{-xy}dy = \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}$ 이므로 적분의 순서를 바꾸어서 계산하면

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}dx &= \int_0^\infty \int_1^2 e^{-xy}dydx = \int_1^2 \int_0^\infty e^{-xy}dxdy \\ &= \int_1^2 \left[-\frac{1}{y}e^{-xy}\right]_{x=0}^{x=\infty} dy = \int_1^2 \frac{1}{y}dy = \ln 2\end{aligned}$$

1-4 $\alpha > 1$ 일 때, 다음 적분값이 존재함을 보여라.

$$\int_1^\infty \cos(x^\alpha)dx$$

풀이 : $x^\alpha = t$ 라 하면 $dx = \frac{1}{\alpha}t^{(\frac{1}{\alpha}-1)}dt$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_1^R \cos(x^\alpha)dx &= \frac{1}{\alpha}\int_1^{R^\alpha} t^{(\frac{1}{\alpha}-1)}\cos t dt \\ &= \frac{1}{\alpha}t^{\frac{1}{\alpha}-1}\sin t\,|_1^{R^\alpha} - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\int_1^{R^\alpha} t^{(\frac{1}{\alpha}-2)}\sin t dt\end{aligned}$$

이제 $\frac{1}{\alpha}-2 < -1$ 이므로 $\int_1^\infty \left|t^{\frac{1}{\alpha}-2}\sin t\right| dt$ 가 존재하고, 또 $\frac{1}{\alpha}-1 < 0$ 이므로 $R \to \infty$ 일 때의 왼쪽 극한값도 존재한다. 따라서 주어진 적분값이 존재한다.

1-5 다음 값을 구하여라.

$$\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{2\pi}{10}\cdots\sin\frac{9\pi}{10}$$

풀이 : $\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ 라고 하면 방정식 $z^n-1=0$ 의 근은 $1,\omega,\omega^2,\cdots,\omega^{n-1}$ 이다. 그러므로

$$\begin{aligned}\frac{z^n}{z-1} &= z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z+1\\ &= (z-\omega)(z-\omega^2)\cdots(z-\omega^{n-1})\\ n &= (1-\omega)(1-\omega^2)\cdots(1-\omega^{n-1})\\ &= |1-\omega||1-\omega^2|\cdots|1-\omega^{n-1}|\end{aligned}$$

한편, $1-\omega^k=(1-\cos\frac{2k\pi}{n})-i\sin\frac{2k\pi}{n}$ 에서

$$|1-\omega^k|=\sqrt{2-2\cos\frac{2k\pi}{n}}=\sqrt{4\sin^2\frac{k\pi}{n}}=2\sin\frac{k\pi}{n}$$

이므로

$$\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{2\pi}{10}\cdots\sin\frac{9\pi}{10}=\frac{10}{2^9}$$

2-1 모든 성분이 양수인 3×3 행렬 A 의 역행렬 A^{-1} 이 존재한다. A^{-1} 의 성분 중에서 양수인 성분이 6개일 때, A^{-1} 의 성분 중에서 음수인 성분은 3개임을 보여라.

풀이 : 행렬 A 와 A^{-1} 의 $ij-$성분을 각각 a_{ij},b_{ij} 라고 하자. $AA^{-1}=I$ 이므로 각 $j=1,2,3$ 에 대하여

$$a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}=0$$

을 만족하는 $i\neq j$ 가 존재한다. A^{-1} 의 행렬식은 $\neq 0$ 이므로 j 열의 성분 모두가 0일 수는 없다. A 의 성분이 모두 양수이므로 위의 식을 만족하기 위해서는 b_{kj} 중에서 양인 수와 음인 수가 적어도 하나씩 존재해야 한다. 각 열마다 양수와 음수가 적어도 하나씩 존재하므로 A^{-1} 의 성분 중에는 최소한 3개의 양수와 3개의 음수가 존재한다. A^{-1} 의 성분의 개수가 9 이고 양인 성분의 수가 6 이므로 음인 성분의 개수는 3 이다.

2-2 폐구간 $[0,1]$ 에서 정의된 함수열 ϕ_n 이 다음을 만족시킨다.

(1) $\phi_0(t)\equiv 0.$

(2) $\phi_n(t)=1+2\sin\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\int_0^t\phi_{n-1}(s)ds,\ n=1,2,\ldots$

폐구간 $[0,1]$ 에서 함수열 함수열 ϕ_n 이 수렴함을 보이고 $\lim_{n\to\infty}\phi_n=\phi$ 을 구하여라.

풀이 : $\psi_n=\phi_n-\phi_{n-1}$ 이라고 하면 $M_n=\max\{|\psi_n(x)|:x\in[0,1]\}$ 는 부등식 $M_{n+1}\leq\frac{1}{2}M_n$ 을 만족한다. 따라서 $\sum M_n<\infty$ 이고 $\phi_n=\sum_{k=1}^n\psi_k$ 는 구간 $[0,1]$ 에서 고르게 수렴한다. 두번째 조건식의 양변을 $n\to\infty$ 하면

$$\phi(t)=1+2\sin\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\int_0^t\phi(s)ds$$

이므로 ϕ 는 미분방정식

$$\phi'+\frac{1}{2}\phi=\cos\frac{t}{2},\ \phi(0)=1$$

을 만족시킨다. 이 미분방정식을 풀면

$$\phi(t) = \sin\frac{t}{2} + \cos\frac{t}{2}.$$

2-3 모든 $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ 에 대해서 a_n 은 0 또는 1 이고, P 와 Q 는 다항식으로서 P 의 차수가 Q 의 차수보다 낮으며 $|x| < 1$ 인 영역에서 다음이 성립한다.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

이때, 적당한 자연수 p 가 존재하여 모든 $n \geq 0$ 에 대하여 $a_{n+p} = a_n$ 이 성립함을 보여라.

풀이 : $Q(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_N x^N$ 이라고 하면

$$c_N a_n + c_{N-1} a_{n+1} + \cdots + c_0 a_{n+N} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

즉, 수열 a_n 은 N 차 선형점화식을 만족시킨다. 이제 무한개의 무한수열 $b_n^{(k)} = a_{n+k}, k = 0, 1, 2, \ldots$ 을 생각하자. 이들은 모두 $N+1$ 개의 초기값에 의해서 결정되는데, 수열 a_n 은 0 또는 1 값만을 가지므로 초기값의 개수는 유한개, 2^{N+1} 개이다. 그러므로 적당한 p 에 대하여 $b_n^{(k+p)} = b_n^{(k)}$ 이고, 이 사실은 적당한 자연수 M 과 p 가 존재하여 $n \geq M$ 일 때 $a_{n+p} = a_n$ 이 성립한다는 것이다. 그러면 적당한 자연수 l 에 대하여

$$a_0 + a_1 x + \cdot + a_{M-1} x^{M-1} + \frac{x^l}{1 - x^p} = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

가 성립함을 확인할 수 있다. 그런데 만일 $a_0, \ldots, a_{M-1}$ 중에서 0 이 아니고 1 인 계수가 있다면, 위의 식을 이용하여 P 의 차수가 Q 의 차수보다 낮다는 사실과 모순임을 보일 수 있다. 그러므로

$$\frac{x^l}{1 - x^p} = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

이 성립하고 따라서 모든 $n \geq 0$ 에 대하여 $a_{n+p} = a_n$ 이 성립한다.

2-4 $p_i, q_i > 0$ 이고 $\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n q_i = 1$ 일 때, 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (p_i - q_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} p_i \ln\left(\frac{p_i}{q_i}\right)$$

풀이 : $f(x) = -x \ln x, \quad 0 < x < 1$ 이라 하자. 그러면

$$f(x) = f(y) + (x - y) f'(y) + \frac{1}{2}(x - y)^2 f''(\xi), \quad \xi \in (x, y)$$

에서

$$-x \ln x = -y \ln y + (x - y)(-1 - \ln y) + \frac{1}{2}(x - y)^2 \left(-\frac{1}{\xi}\right)$$

로부터

$$-p_i \ln p_i = -q_i \ln q_i - p_i + q_i - p_i \ln q_i + q_i \ln q_i + \frac{1}{2}(p_i - q_i)^2 \left(-\frac{1}{\xi_i}\right), \quad 0 < \xi_i < 1$$

정리하면

$$p_i \ln p_i - p_i \ln q_i - p_i + q_i = \frac{1}{2}(p_i - q_i)^2 \frac{1}{\xi_i} > \frac{1}{2}(p_i - q_i)^2$$

이제 $\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n q_i$ 이므로

$$\sum_{i=1}^n p_i \ln\left(\frac{p_i}{q_i}\right) \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (p_i - q_i)^2.$$

2-5 수열 $\{x_n\}$ 이 다음 조건

$$x_m > 0, \quad x_{m+n} \leq x_m + x_n, \quad m, n = 1, 2, 3, \ldots$$

을 만족할 때, 수열 $\{x_n/n\}$ 이 수렴함을 보여라.

풀이 : 집합 $\{\frac{x_k}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ 의 최대하계를 L 이라 하자. 이제 $\lim_{n\to n} \frac{x_k}{n} = L$ 임을 보이면 충분하다. 임의의 양수 ϵ 에 대하여 $\frac{x_m}{m} < L + \epsilon$ 을 만족하는 자연수 m 이 존재한다. 임의의 자연수 n 에 대하여 n 을 m 으로 나눈 나머지를 r 이라 하면 $n = qm + r,\ 0 \leq r \leq m - 1$ 꼴로 표시된다. 이제 $x_0 = 0$ 이라 하면

$$x_n = x_{qm+r} \leq x_m + \cdots + x_m + x_r = qx_m + x_r$$

이므로

$$\frac{x_n}{n} = \frac{x_{qm+r}}{qm+r} \leq \frac{qx_m + x_r}{qm+r} = \frac{x_m}{m}\frac{qm}{qm+r} + \frac{x_r}{n}$$

이 성립한다. 그런데 $\frac{x_m}{m} < L + \epsilon$ 이므로

$$L \leq \frac{x_n}{n} < L + \epsilon + \frac{x_r}{n}$$

이다. 이제 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_r}{n} = 0$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = L$$

이다.