제 21 회 전국대학생수학경시대회
(해 답)

제 1 차 (오전) **2002년 9월 28일**

1. $x \neq 0$ 일 때, $xf(x) = e^x + c$ (c는 상수). 또, $f(x)$는 $\mathbb{R}$에서 연속이므로,

$$0 = \lim_{x\to 0} xf(x) = \lim_{x\to 0}(e^x + c) = c + 1, \quad \text{즉, } c = -1.$$

그러므로 $x \neq 0$ 일 때, $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$. 한편, $f(0) = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$. 따라서,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

2. 행렬식 $|A|$의 제 1열을 제 2002열에 더하면

$$a_1 + a_{2002} = a_2 + a_{2001} = a_3 + a_{2000} = \cdots$$

이므로,

$$|A| = (a_1 + a_{2002}) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{2001} & 1 \\ a_2 & a_1 & a_2 & \dots & a_{2000} & 1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & a_{1999} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{2002} & a_{2001} & a_{2000} & \dots & a_2 & 1 \end{vmatrix}$$

이제, 제 2002 행에서 제 2001 행을 빼고, 제 2001행에서 제 2000 행을 빼고, $\cdots$, 제 2행에서 제 1 행을 빼는 것을 차례로 행하면 다음을 얻는다.

$$
\begin{aligned}
|A| &= (a_1+a_{2002})\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{2001} & 1 \\ d & -d & -d & \dots & -d & 0 \\ d & d & -d & \dots & -d & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ d & d & d & \dots & d & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1+2002}(a_1+a_{2002})\begin{vmatrix} d & -d & -d & \dots & -d \\ d & d & -d & \dots & -d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ d & d & d & \dots & d \end{vmatrix}_{(2001\text{차 행렬식})}
\end{aligned}
$$

마지막으로, 제 2001 행을 각 행에 더하면 다음을 얻는다.

$$
\begin{aligned}
|A| &= -(a_1+a_{2002})\begin{vmatrix} 2d & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 2d & 2d & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 2d & 2d & 2d & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ d & d & d & \dots & \dots & d \end{vmatrix} \\
&= -(a_1+a_{2002})(2d)^{2000}d \\
&= -2^{2000}(2a+2001d)d^{2001}
\end{aligned}
$$

3. $n=2$ 인 경우부터 증명하자. 즉, 단위벡터 a,b,c,d 가 동일 평면 상에 있을 때부터 증명하자. a,b,c,d 가 양의 x 축과 이루는 각을 각각 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 라 하면 $\langle a,c\rangle = ||a||\,||c||\cos(\gamma-\alpha) = \cos(\gamma-\alpha)$ 이므로 다음을 얻는다.

$$
\begin{aligned}
& \langle a,c\rangle\langle b,d\rangle - \langle a,d\rangle\langle b,c\rangle \\
=\ & \cos(\gamma-\alpha)\cos(\delta-\beta) - \cos(\delta-\alpha)\cos(\gamma-\beta) \\
=\ & \frac{1}{2}\left[\cos\{(\gamma-\alpha)+(\delta-\beta)\} + \cos\{(\gamma-\alpha)-(\delta-\beta)\}\right. \\
& \quad \left. -\cos\{(\delta-\alpha)+(\gamma-\beta)\} - \cos\{(\delta-\alpha)+(\gamma-\beta)\}\right] \\
=\ & \frac{1}{2}\left[\cos\{(\beta-\alpha)-(\delta-\gamma)\} + \cos\{(\beta-\alpha)+(\delta-\gamma)\}\right] \\
=\ & \sin(\beta-\alpha)\sin(\delta-\gamma)
\end{aligned}
$$

그러므로, $|\langle a,c\rangle\langle b,d\rangle - \langle a,d\rangle\langle b,c\rangle| \le 1$.

이제 일반적인 경우를 증명하자. 즉, a,b,c,d 가 $\mathbb{R}^n$ $(n>2)$ 의 단위벡터일 때 증명하자. 우선 a 를 포함하는 어떤 평면 위로의 c 의 정사영을 $\widetilde{c}$ 라 하면 삼수선의 정리에 의하여 c 와 $\widetilde{c}$ 의 a 위로의 정사영은 일치한다. 따라서, $\langle a,c\rangle = \langle a,\widetilde{c}\rangle$ 임을 알 수 있다. 지금, 두 벡터 a,b 가 결정하는 평면을 $\mathbb{R}^2$ 라 하고, c,d 의 $\mathbb{R}^2$ 위로의 정사영을 $\widetilde{c},\widetilde{d}$ 라고 하자. $a,b,\widetilde{c},\widetilde{d}$

가 양의 x 축과 이루는 각을 각각 $\alpha, \beta, \widetilde{\gamma}, \widetilde{\delta}$ 라 하면, 위의 $n=2$ 인 경우의 결과에 의하여 다음 등식이 성립한다.

$$\begin{aligned}\langle a,c\rangle\langle b,d\rangle - \langle a,d\rangle\langle b,c\rangle &= \langle a,\widetilde{c}\rangle\langle b,\widetilde{d}\rangle - \langle a,\widetilde{d}\rangle\langle b,\widetilde{c}\rangle \\ &= ||\widetilde{c}||\,||\widetilde{d}||\sin(\beta-\alpha)\sin(\widetilde{\delta}-\widetilde{\gamma})\end{aligned}$$

여기서, $||\widetilde{c}|| \le 1$, $||\widetilde{d}|| \le 1$ 이므로, $|\langle a,c\rangle\langle b,d\rangle - \langle a,d\rangle\langle b,c\rangle| \le 1$ 이 성립한다.

4. **(제 1 분야)**

$f \equiv 0$ 이 아니라고 가정하자. 그래서 $f(\alpha) \neq 0$ 인 $\alpha \in (a,b]$ 가 존재한다. 일반적인 손실없이 $f(\alpha) > 0$ 이라고 가정하자. f 의 연속성에 의해

$$\exists\, c \in [a,\alpha) \text{ s.t. } f(c)=0,\ \ f(x) > 0 \text{ on } (c,\alpha].$$

이제 $g(x) := \ln f(x) - \dfrac{2003}{2002}x$ 라 하면

(i) $g(x)$ 는 구간 $(c,\alpha]$ 에서 잘 정의되고

(ii) $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)} - \dfrac{2003}{2002} \le \left|\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right| - \dfrac{2003}{2002} \le 0.$

따라서 g 는 $(c,\alpha]$ 에서 (넓은 뜻의) 감소함수이다. 즉,

$$\begin{aligned} g(x) \ge g(\alpha), &\qquad x \in (c,\alpha], \\ \ln f(x) - \frac{2003}{2002}x \ge \ln f(\alpha) - \frac{2003}{2002}\alpha, & \\ f(x) \ge f(\alpha)e^{\frac{2003}{2002}(x-\alpha)}, &\quad x \in (c,\alpha]. \end{aligned}$$

그러므로 f 의 연속성으로 부터

$$\begin{aligned} 0 = f(c) &= \lim_{\delta\to 0+} f(c+\delta) \\ &\ge \lim_{\delta\to 0+} f(\alpha)e^{\frac{2003}{2002}(c+\delta-\alpha)} \\ &= f(\alpha)e^{\frac{2003}{2002}(c-\alpha)} > 0 \quad (\text{모순}). \end{aligned}$$

따라서, 구간 $[a,b]$ 에서 $f(x) \equiv 0$ 이다.

4. **(제 2 분야)**

$f(x,y)$ 의 분모, 분자가 모두 2차 동차식이므로 집합 $\{(x,y)|\ 2x^2+y^2 = 1\}$ 에서의 x^2-xy+y^2 의 최소값을 구하면 된다. 이제,

$$g_1(x,y) := x^2-xy+y^2, \qquad g_2(x,y) := 2x^2+y^2$$

으로 놓고 $g_1(x,y)$ 가 $(x_0,y_0) \in \{(x,y)|g_2(x,y)=1\}$ 에서 최소값을 갖는다고 하면 Lagrange 승수법에서,

$$
\begin{aligned}
& \nabla g_1(x_0, y_0) = \lambda \nabla g_2(x_0, y_0) \\
\Rightarrow\quad & (2x_0 - y_0, -x_0 + 2y_0) = \lambda(4x_0, 2y_0) \qquad (1) \\
\Rightarrow\quad & \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow\quad & \begin{pmatrix} 2-4\lambda & -1 \\ -1 & 2-2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

이 식을 만족하는 λ를 구하면, $\det \begin{pmatrix} 2-4\lambda & -1 \\ -1 & 2-2\lambda \end{pmatrix} = 0$ 에서

$$\lambda = \frac{3+\sqrt{3}}{4}, \quad \frac{3-\sqrt{3}}{4}.$$

따라서, 구하는 최소값은 $\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$ 이다.

(그 이유: $\lambda = \dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$ 일 때, (1) 식은

$$
\begin{aligned}
& (2x_0 - y_0, -x_0 + 2y_0) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \frac{3-\sqrt{3}}{4}(4x_0, 2y_0) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow\quad & 2(x_0^2 - x_0y_0 + y_0^2) = \frac{3-\sqrt{3}}{4}\, 2\,(2x_0^2 + y_0^2) \\
\Rightarrow\quad & \frac{x_0^2 - x_0y_0 + y_0^2}{2x_0^2 + y_0^2} = \frac{3-\sqrt{3}}{4} \;)
\end{aligned}
$$

(참고) (2)에서

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}-1 & -1 \\ -1 & \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

이므로, $y_0 = (\sqrt{3}-1)x_0$ 이다. 또한, $y_0 = (\sqrt{3}+1)x_0$ 일 때, 최대값 $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$ 을 갖는다.

[별해 1]
$f(x, y)$ 의 분모, 분자가 모두 2차 동차식이므로 $g_1(x, y) := 2x^2+y^2 = 1$ 일 때 $g_2(x, y) = x^2-xy+y^2$ 의 최소값을 구하면 된다. 즉, 타원 $2x^2+y^2 = 1$ 위에서의 $g_2(x, y)$ 의 최소값을 구하면 된다.

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta$, $y = \sin\theta$ 라 하면

$$\begin{aligned} g_2(x,y) &= \frac{1}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta \\ &= \frac{1+\cos 2\theta}{4} - \frac{\sin 2\theta}{2\sqrt{2}} + \frac{1-\cos 2\theta}{2} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos 2\theta + \sqrt{\frac{2}{3}}\sin 2\theta\right) \\ &= \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\cos(2\theta - \alpha) \qquad (\text{단}, \tan\alpha = \sqrt{2}) \end{aligned}$$

이므로 $g_2(x,y)$ 의 최소값은 $\frac{3-\sqrt{3}}{4}$ 이다.

[별해 2]
$x = 0$ 일 때 $y \neq 0$ 이므로 $f(0,y) = 1$ 이다. $x \neq 0$ 일 때 분보, 분자를 x^2 으로 나누고 $\frac{y}{x} = t$ 라 하면

$$f(x,xt) = \frac{1-t+t^2}{2+t^2}$$

이다. t 는 모든 실수값을 가지므로 이 식의 값을 a 라 하면

$$(a-1)t^2 + t + 2a - 1 = 0$$

을 얻는다. $a = 1$ 일 때 $t = -1$ 이고, $a \neq 1$ 일 때 t 는 실수이므로 판별식 $D \equiv 1 - 4(a-1)(2a-1) \geq 0$, 즉, $8a^2 - 12a + 3 \leq 0$. 그러므로,

$$\frac{3-\sqrt{3}}{4} \leq a \leq \frac{3+\sqrt{3}}{4}$$

따라서, a 의 최소값은 $\frac{3-\sqrt{3}}{4}$ 이다.

5. **(제 1 분야)**

$$\frac{\big((n-1)!\big)^{\frac{1}{n-1}}}{(n!)^{\frac{1}{n}}} < \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{\big((n+1)!\big)^{\frac{1}{n+1}}} \tag{1}$$

(1)의 양변을 $(n-1)n(n+1)$ 거듭제곱하여 정리하면 (1)은

$$\big((n-1)!\big)^{n(n+1)}\big((n+1)!\big)^{n(n-1)} < (n!)^{2(n^2-1)} \tag{2}$$

와 동치이다. (2)를 다시 변형하면

$$\big((n-1)!\big)^{n^2+n}\big((n-1)!\big)^{n^2-n} n^{n(n-1)}(n+1)^{n(n-1)} < \big((n-1)!\big)^{2n^2-2} n^{2n^2-2}$$

이므로, 양변을 $\big((n-1)!\big)^{2n^2} n^{2n(n-1)}$ 로 나누면, (1)은

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n(n-1)} < \left(\frac{n^n}{n!}\right)^2 \tag{3}$$

과 동치이다. 따라서 (3)을 증명하면 된다. 한편, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ 이고 $\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\}$ 은 증가수열이므로

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n(n-1)} < e^{n-1} \tag{4}$$

한편,

$$\sqrt{n\cdot 1} < \frac{n+1}{2},\ \sqrt{(n-1)\cdot 2} < \frac{n+1}{2}, \cdots, \sqrt{1\cdot n} < \frac{n+1}{2}$$

이므로 이들을 변끼리 곱하면 $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$. 따라서 다음 관계식을 얻는다.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{n^n}{n!}\right)^2 > \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{2n} &= \left(1-\frac{n}{n+1}\right)^{2n} 2^{2n} \\
&= \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)\cdot\frac{2n}{n+1}} \cdot 4^n \\
&> e^{-\frac{2n}{n+1}} e^{sn} \qquad (s := 4-2\sqrt{2}) \\
&= e^{\frac{(s-1)n^2-(2-s)n+1}{n+1}} e^{n-1} \\
&= e^{\frac{s-1}{n+1}\left(n-\frac{2-s}{2(s-1)}\right)^2} e^{n-1} \\
&= e^{\frac{3-2\sqrt{2}}{n+1}(n-\sqrt{2}-1)^2} e^{n-1} > e^{n-1}
\end{aligned} \tag{5}$$

그러므로, (3), (4), (5) 에 의하여

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n(n-1)} < e^{n-1} < \left(\frac{n^n}{n!}\right)^2$$

이 성립한다.

5. **(제 2 분야)**

함수 h 는 우함수와 기함수의 합으로 표현된다. 즉,

$$E(x) := \frac{h(x)+h(-x)}{2}, \qquad O(x) := \frac{h(x)-h(-x)}{2}$$

로 두면 E 는 우함수, O 는 기함수이며 $h = E + O$ 이다. 가정에 의하여 f 는 우함수이므로 fE 는 우함수, fO 는 기함수이다. 따라서 코시-쉬바르츠 부등식에 의하여 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} I_1 &:= \left\{\int_{-1}^{1} f(x)h(x)dx\right\}^2 \\ &= \left\{\int_{-1}^{1} f(x)E(x)dx\right\}^2 \\ &\leq \left(\int_{-1}^{1} \{f(x)\}^2 dx\right)\left(\int_{-1}^{1} \{E(x)\}^2 dx\right) \\ &= \int_{-1}^{1} \{E(x)\}^2 dx \end{aligned}$$

같은 방법으로 다음을 얻는다.

$$I_2 := \left\{\int_{-1}^{1} g(x)h(x)dx\right\}^2 \leq \int_{-1}^{1} \{O(x)\}^2 dx$$

따라서,

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &\leq \int_{-1}^{1} \left(E(x)^2 + O(x)^2\right) dx \\ &= \int_{-1}^{1} \left(E(x) + O(x)\right)^2 dx - 2\int_{-1}^{1} E(x)O(x)dx \\ &= \int_{-1}^{1} \{h(x)\}^2 dx \end{aligned}$$

제 21 회 전국대학생수학경시대회
(해　　답)

제 2 차 (오후) **2002년 9월 28일**

1. $b_k := \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$ $(k = 1, \cdots, n-1)$ 로 놓으면 (가)에 의하여 $b_k \geq 1$ $(k = 1, \cdots, n-1)$ 이고 주어진 부등식은 다음과 동치이다.

$$\begin{aligned}(1+x_1b_1)(1+x_2b_2)\cdots(1+x_{n-1}b_{n-1})(b_1b_2\cdots b_{n-1}+x_n)\\ \geq b_1b_2\cdots b_{n-1}(x_1+1)(x_2+1)\cdots(x_n+1) \qquad (1)\end{aligned}$$

한편, $k = 1, 2, \cdots, n-1$ 일 때, $x_k \geq x_n$, $b_k \geq 1$ 이므로 임의의 $c \geq 1$ 에 대하여

$$(1+x_kb_k)(b_kc+x_n) - b_k(x_k+1)(x_n+c) = (x_kb_kc - x_n)(b_k-1) \geq 0$$

따라서 다음이 성립한다.

$$(1+x_kb_k)(b_kc+x_n) \geq b_k(x_k+1)(x_n+c), \qquad k = 1, 2, \cdots, n-1$$

$k = 1, 2, \cdots, n-2$ 일 때, $c := b_{k+1}\cdots b_{n-1}$ 로 놓으면

$$(1+x_kb_k)(b_kb_{k+1}\cdots b_{n-1}+x_n) \geq b_k(x_k+1)(b_{k+1}\cdots b_{n-1}+x_n) \qquad (2)$$

$k = n-1$ 일 때, $c := 1$ 로 놓으면

$$(1+x_{n-1}b_{n-1})(b_{n-1}+x_n) \geq b_{n-1}(x_{n-1}+1)(x_n+1) \qquad (3)$$

(2),(3)을 변변끼리 곱하고 같은 인수로 약분하면 (1)식을 얻는다.

2. 먼저, 주어진 행렬이 양의 준정부호일 필요충분조건은 모든 대각부분행렬의 행렬식이 0 보다 크거나 같음이다. 그런데 임의의 대각부분행렬은 역시 같은 꼴이므로, 모든 행렬 A_n 의 행렬식 d_n 이 0 이상인 조건을 구하는 것과 같은 문제이다.

   이제, d_n 사이의 관계를 구하면

$$d_1 = 1, \qquad d_2 = 1 - |\alpha|^2, \qquad d_{n+2} = d_{n+1} - |\alpha|^2 d_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

임을 쉽게 알수 있다. 따라서, 문제는 다음을 증명하는 것과 같다.

수열 $\{d_n\}$ 이 다음

$$d_0 = d_1 = 1, \qquad d_{n+2} = d_{n+1} - r d_n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{1}$$

과 같이 주어져 있을 때 (단, $0 < r < 1$), 다음은 동치이다:

(가) 임의의 $n = 1, 2, \ldots$ 에 대하여 $d_n \geq 0$ 이다.

(나) $r \leq \dfrac{1}{4}$

(가) $\Longrightarrow$ (나): 먼저 수열 $\left\{\dfrac{d_{n+1}}{d_n}\right\}$ 이 감소수열임을 보이자.

$$\begin{aligned} d_{n+1}^2 - d_n d_{n+2} &= d_{n+1}^2 - d_n(d_{n+1} - r d_n) \\ &= d_{n+1}(d_{n+1} - d_n) + r d_n^2 \\ &= -r d_{n+1} d_{n-1} + r d_n^2 \\ &= r(d_n^2 - d_{n-1} d_{n+1}) \end{aligned}$$

이를 반복하면

$$d_{n+1}^2 - d_n d_{n+2} = r^n (d_1^2 - d_0 d_2) = r^{n+1} > 0$$

따라서 $\dfrac{d_{n+1}}{d_n} > \dfrac{d_{n+2}}{d_{n+1}}$, 즉, $\left\{\dfrac{d_n}{d_{n+1}}\right\}$ 은 감소수열이고, 그러므로 어떤 실수 x 로 수렴한다.

$$\frac{d_{n+2}}{d_{n+1}} = \frac{d_{n+1} - r d_n}{d_{n+1}} = 1 - r \frac{d_n}{d_{n+1}}$$

이므로 극한값을 취하면, $x = 1 - \dfrac{r}{x}$, 즉, $x^2 - x + r = 0$ 이고 x 는 실수이므로 $D \equiv 1 - 4r \geq 0$, 즉, $r \leq \dfrac{1}{4}$ 이다.

(나) $\Longrightarrow$ (가): 점화식 (1)을 변형하여, $n = 0, 1, 2, \cdots$ 에 대하여

$$d_{n+2} - a\, d_{n+1} = b\,(d_{n+1} - a\, d_n) \tag{2}$$

이라 하면,

$$a + b = 1, \qquad ab = r \tag{3}$$

이다. 이 때,

$$d_{n+2} - a\, d_{n+1} = b^{n+1}(d_1 - a\, d_0) = b^{n+2}$$

이므로

$$d_{n+2} = a\, d_{n+1} + b^{n+2} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{4}$$

이다. 또, $d_0 = d_1 = 1$, $d_2 = a + b^2$ 이다. 만일 $r \le \frac{1}{4}$ 이면 (3)에서 a, b 는 2차방정식

$$t^2 - t + r = 0 \tag{5}$$

의 두근이고, 판별식 $D \equiv 1 - 4r \ge 0$ 이므로 a, b 는 (5)의 양의 실근이다. 따라서 (4)에 의하여 귀납적으로 $n = 1, 2, \cdots$ 에 대하여 항상 $d_n \ge 0$ 이다.

[별해 1]
먼저, 주어진 행렬이 양의 준정부호일 필요충분조건은 모든 대각부분행렬의 행렬식이 0 보다 크거나 같음이다. 그런데 임의의 대각부분행렬은 역시 같은 꼴이므로, 모든 행렬 A_n 의 행렬식 d_n 이 0 이상인 조건을 구하는 것과 같은 문제이다.

d_n 사이의 관계를 구하면

$$d_1 = 1, \qquad d_2 = 1 - |\alpha|^2, \qquad d_{n+2} = d_{n+1} - |\alpha|^2 d_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

따라서, $|\alpha| = r$, $d_0 = 1$ 이라 하면 수열 $\{d_n\}$ 은

$$d_0 = d_1 = 1 \qquad d_{n+2} = d_{n+1} - r^2 d_n \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{1}$$

으로 주어진다. 단, $r > 0$.

이제, $d_n = u^n$ 이라 하고 (1)의 특성방정식을 구하면

$$u^2 - u + r^2 = 0 \tag{2}$$

이다. $u = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4r^2}}{2}$ 이므로 $D \equiv 1 - 4r^2$ 이라 하면 다음 세가지 경우가 나온다.

경우 1 ($D = 1 - 4r^2 > 0$, 즉, $r < \frac{1}{2}$ 일 때): (1)의 일반해는 다음과 같다.

$$d_n = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4r^2}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4r^2}}{2} \right)^n$$

여기서, $d_0 = c_1 + c_2 = 1$, $d_1 = \frac{c_1 + c_2}{2} + \frac{c_1 - c_2}{2} \sqrt{1 - 4r^2} = 1$. 그러므로 $c_1 - c_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - 4r^2}}$. 따라서

$$c_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4r^2}}{2\sqrt{1 - 4r^2}}, \qquad c_2 = -\frac{1 - \sqrt{1 - 4r^2}}{2\sqrt{1 - 4r^2}}$$

결국,

$$d_n = \frac{1}{\sqrt{1 - 4r^2}} \left\{ \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4r^2}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4r^2}}{2} \right)^{n+1} \right\} > 0$$

경우 2 ($D = 1-4r^2 = 0$, 즉, $r = \frac{1}{2}$ 일 때): (2)는 $u = \frac{1}{2}$ 인 중근을 가지므로 (1)의 일반해는 다음과 같다.

$$d_n = c_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + c_2\, n \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

그런데, $d_0 = c_1 = 1$, $d_1 = \frac{1}{2} + \frac{c_2}{2} = 1$ 이므로 $c_2 = 1$. 그러므로

$$d_n = (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n > 0$$

경우 3 ($D = 1-4r^2 < 0$, 즉, $r > \frac{1}{2}$ 일 때): (2)에서

$$u = \frac{1 \pm i\sqrt{4r^2-1}}{2} = r\left(\frac{1}{2r} \pm i\sqrt{1-\frac{1}{4r^2}}\right)$$

이제, $\cos\theta = \frac{1}{2r}$, $\sin\theta = \sqrt{1-\frac{1}{4r^2}}$ 라 하면 $u = r(\cos\theta \pm i\sin\theta)$ 이므로 (1)의 일반해는

$$d_n = r^n(c_1\cos n\theta + c_2 \sin n\theta)$$

로 주어진다.

$$d_0 = c_1 = 1, \quad d_1 = r\cos\theta + rc_2\sin\theta = 1$$

이므로

$$c_2 = \frac{1-r\cos\theta}{r\sin\theta} = \frac{1}{2r\sin\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

그러므로,

$$d_n = r^n\left(\cos n\theta + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin n\theta\right) = \frac{r^n}{\sin\theta}\sin(n+1)\theta$$

따라서 d_n은 양, 음의 값을 모두 가진다.

이상에서 $d_n \geq 0$ 이 될 필요충분조건은 $|\alpha| \leq \frac{1}{2}$ 임을 알 수 있다.

[별해 2]
학부수준에서는 어려우나, 푸리에해석의 이론을 사용하면 이 문제는 함수 $\alpha e^{-it} + 1 + \overline{\alpha}e^{it}$ 가 언제 nonnegative 함수가 되는가 하는 문제와 같다. 그런데

$$\alpha e^{-it} + 1 + \overline{\alpha}e^{it} = 1 + 2\mathrm{Re}\,(\overline{\alpha}e^{it})$$

이므로, 구하는 조건은

$$1 + 2\,\mathrm{Re}\,(\overline{\alpha}e^{it}) \geq 0,\ t\in\mathbb{R} \iff \mathrm{Re}\,(\overline{\alpha}e^{it}) \geq -\frac{1}{2},\ t\in\mathbb{R} \iff |\alpha| \leq \frac{1}{2}$$

이다.

3. $z(t) := x(t) + i\,y(t)$ 라 하고 둘째 식에 i 를 곱하여 첫째 식에 더하면,

$$z'' - 2i\,z' - z = 0 \tag{1}$$

특성방정식을 구하면,

$$\alpha^2 - 2i\,\alpha - 1 = (\alpha - i)^2 = 0$$

근이 $\alpha = i$ (중근)이므로, (1)의 일반해는

$$z = c_1 e^{it} + c_2 t e^{it} \qquad (c_1, c_2 \text{ 는 복소상수}) \tag{2}$$

또, 초기조건은 $z(0) = x(0) + i\,y(0) = 0$, $z'(0) = x'(0) + i\,y'(0) = a$ 이므로 (2)에 의해서,

$$z(0) = c_1 = 0, \qquad z'(0) = i\,c_1 + c_2 = c_2 = a$$

따라서 구하는 해는 $z(t) = ate^{it} = at(\cos\,t + i\,\sin\,t)$, 즉,

$$x = at\cos\,t, \qquad y = at\sin\,t$$

[별해]

$$x''(t) + 2y'(t) - x(t) = 0 \tag{1}$$

$$y''(t) - 2x'(t) - y(t) = 0 \tag{2}$$

$$x(0) = y(0) = 0, \quad x'(0) = a(>0), \quad y'(0) = 0 \tag{3}$$

(1)의 양변을 미분하면 $x''' + 2y'' - x' = 0$. (2)에서 $y'' = 2x' + y$ 를 대입하면, $x''' + 3x' + 2y = 0$. 그러므로,

$$2y = -x''' - 3x' \tag{4}$$

(4)를 미분하면 $2y' = -x'''' - 3x''$. 이것을 (1)에 대입하면

$$x'''' + 2x'' + x = 0 \tag{5}$$

(5)의 특성방정식은 $\alpha^4 + 2\alpha^2 + 1 = (\alpha^2 + 1)^2 = 0$ 이므로 $\alpha = \pm i$ (2중근). 따라서 (5)의 일반해는 다음과 같다.

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)\cos t + (c_3 + c_4 t)\sin t \tag{6}$$

(6)을 미분하면

$$\begin{aligned}
x'(t) &= (c_2 + c_3 + c_4 t)\cos t + (c_4 - c_1 - c_2 t)\sin t \\
x''(t) &= (2c_4 - c_1 - c_2 t)\cos t + (-2c_2 - c_3 - c_4 t)\sin t \\
x'''(t) &= (-3c_1 - c_3 - c_4 t)\cos t + (-3c_4 + c_1 + c_2 t)\sin t
\end{aligned}$$

(4)에서

$$y(t) = (-c_3 - c_4 t)\cos t + (c_1 + c_2 t)\sin t \tag{7}$$

그래서,

$$y'(t) = (-c_4 + c_1 + c_2 t)\cos t + (c_2 + c_3 + c_4 t)\sin t$$

초기조건에서, $x(0) = c_1 = 0$, $y(0) = -c_3 = 0$, $x'(0) = c_2 + c_3 = a$, $y'(0) = -c_4 + c_1 = 0$ 이므로 $c_1 = c_3 = c_4 = 0$, $c_2 = a$. 따라서, (6), (7)에서 구하는 해는

$$x = at\cos\, t, \qquad y = at\sin\, t$$

4. **(제 1 분야)**

주어진 실수 α 가 유리수라 가정하고, α 의 최소순환마디의 길이 (순환주기)를 d 라 하자. 소수는 무한히 많으므로 이 순환마디에는 1 이 포함되어 있다. 첫번째 순환마디의 첫번째 자리가 소수점 이하 k 번째 자리라 하고, $m > \max\{k, d\}$ 로 잡자. 그러면,

$$(m+1)! + 2,\ (m+1)! + 3,\ \cdots,\ (m+1)! + (m+1)$$

은 $m(> d)$ 개의 연속한 합성수이고, $(m+1)! + 2 > k$ 이므로 모순이다.

4. **(제 2 분야)**

$$\begin{aligned}
\text{준식} &= \int_0^\infty \left[\frac{1}{x}\tan^{-1} ux\right]_{u=b}^{u=a} dx \\
&= \int_0^\infty \int_b^a \frac{1}{1+u^2x^2} du\, dx \\
&= \int_b^a \int_0^\infty \frac{1}{1+u^2x^2} dx\, du \\
&= \int_b^a \left[\frac{1}{u}\tan^{-1} ux\right]_{x=0}^{x=\infty} du \\
&= \int_b^a \frac{\pi}{2u} du \\
&= \frac{\pi}{2}\left[\ln u\right]_b^a \\
&= \frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}
\end{aligned}$$

[별해]

$$f(a) := \int_0^\infty \frac{\tan^{-1} ax - \tan^{-1} bx}{x} dx \tag{1}$$

로 놓으면,

$$f'(a) = \int_0^\infty \frac{dx}{1+a^2x^2} = \left[\frac{1}{a}\tan^{-1}ax\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2a}$$

그러므로, $f(a) = \frac{\pi}{2}\ln a + c$. (1)에서 $f(b) = \frac{\pi}{2}\ln b + c = 0$ 이므로 $c = -\frac{\pi}{2}\ln b$. 그러므로 $f(a) = \frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}$.