

제 17 회 한국수학을림피아드 - 2 차 시험

중 등 부 - 2003년 11월 16일

1. 음이 아닌 어떠한 정수 n 에 대하여도, 2^{2n+1} 은 네 개의 양의 정수의 제곱의 합으로 표현될 수 없음을 보여라.
2. 서로 다른 두 양의 홀수 a 와 b 가, $(a-b)^2 \leq 8\sqrt{ab}$ 를 만족시킨다고 하자. $n = ab$ 일 때, 방정식

$$x^2 - 2([\sqrt{n}] + 1)x + n = 0$$

의 해가 모두 양의 정수임을 보여라. 단, 임의의 실수 r 에 대하여 $[r]$ 은 r 보다 크지 않은 가장 큰 정수를 나타낸다.

3. 원 O 에 내접하고, $\angle A < \angle B$ 인 예각삼각형 ABC 를 생각하자. 원 외부의 어떤 점 P 가

$$\angle A = \angle PBA = 180^\circ - \angle PCB$$

를 만족시킨다고 하자. 직선 PB 가 원 O 와 만나는 B 가 아닌 점을 D 라 하고, 점 A 에서 원 O 에 접하는 접선이 직선 CD 와 점 Q 에서 만난다고 하자. 이때, $CQ : AB = AQ^2 : AD^2$ 임을 보여라.

4. 임의의 정수 11개가 주어지면, 그 중 6개를 뽑아 그 합이 6의 배수가 되게 할 수 있음을 보여라. 단, 주어진 11개의 정수가 모두 서로 다를 필요는 없다.
5. 네 개의 홀수인 양의 정수 a, b, c, d ($a \leq b \leq c \leq d$) 중에서 임의로 세 수를 뽑아서, 그 합을 남아 있는 한 수로 나누면 그 나머지가 언제나 1이라고 한다. 이러한 네 홀수의 순서쌍 (a, b, c, d) 를 모두 구하여라.

* 제한 시간 3시간; 문항당 7점 *