

제 17 회 한국수학을 올림피아드 - 3 차 시 험

2004년 4월 10일 (제 1 일)

1. 두 변 AB 와 AC 의 길이가 같은 이등변삼각형 ABC 에 내접하는 원 O 가 세 변 BC, CA, AB 와 각각 K, L, M 에서 만난다. 직선 OL 이 KM 과 만나는 점을 N 이라 하고, 직선 BN 이 변 CA 와 만나는 점을 Q 라 하자. 점 A 에서 직선 BQ 에 내린 수선의 발을 P 라 할 때, 등식 $BP = AP + 2PQ$ 가 성립한다고 한다. 이 때, $\frac{AB}{BC}$ 의 값은 어떤 값들이 있겠는가?
2. 방정식 $3y^2 = x^4 + x$ 는 양의 정수해를 갖지 않음을 보여라.
3. 2004대의 컴퓨터를 케이블로 연결하여 컴퓨터 연결망을 구성하였다. 이 컴퓨터들의 집합의 부분집합 S 에 대하여 S 의 어떤 두 컴퓨터도 하나의 케이블로 직접 연결되지 않았을 때 S 를 독립집합이라 하자. 임의의 독립집합의 원소의 개수가 50을 넘지 않도록 하고, 이때 사용된 케이블의 개수를 최소로 하였다.
 - (1) 컴퓨터 L 에 장착된 케이블의 수를 $c(L)$ 로 나타낼 때, 두 컴퓨터 A 와 B 에 대하여, 그 둘이 하나의 케이블로 직접 연결되어 있으면 $c(A) = c(B)$ 이고, 서로 직접 연결되지 않았다면 $|c(A) - c(B)| \leq 1$ 임을 보여라.
 - (2) 이 때 사용된 케이블의 총개수를 구하여라.

제한 시간 4시간 30분

문항당 7점