

제 17 회 한국수학을 올림피아드 - 3 차 시험

2004년 4월 11일 (제 2 일)

4. 원주 위에 서로 다른 번호가 매겨진 n 개의 점이 있다. 이 점 중 k 개의 점을 택하는 방법 중에서, 택하여진 임의의 점으로부터 시계방향으로 가장 가까운, 택하여진 점 사이에는 반드시 3개 이상의 점이 놓이도록 택하는 방법의 수를 구하여라. 단 n 과 k 는 2 이상의 정수이다.
5. 예각삼각형 ABC 의 외접원의 반지름을 R , 내접원의 반지름을 r 이라 하자. 각 A 가 삼각형 ABC 의 세 내각 중 최대의 각이라 하자. 변 BC 의 중점을 M 이라 하고, 두 점 B, C 를 지나고 외접원에 접하는 두 직선의 교점을 X 라 할 때, 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\frac{r}{R} \geq \frac{AM}{AX}.$$

6. 소수 p 에 대하여 $f_p(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$ 이라 할 때, 다음 질문에 답하여라.
- (1) 양의 정수 m 이 p 의 배수일 때, $m(m-1)$ 과 서로소이면서 $f_p(m)$ 을 나누는 소수가 존재함을 보여라.
- (2) $pn + 1$ 이 소수가 되는 양의 정수 n 이 무한히 많음을 보여라.

제한 시간 4시간 30분

문항당 7점