제 18 회 한국수학올림피아드 – 2 차 시험

고 등 부 – 2004년 11월 7일

1. 임의의 실수 x에 대하여 관계식 $f(f(x))-x^2+x+3=0$ 을 만족시키는 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$는 존재하지 않음을 보여라. (단, $\mathbb{R}$은 실수 전체 집합이다.)

2. 서로 소인 양의 정수 x,y와 정수 z가

$$(5z-4x)(5z-4y)=25xy$$

를 만족시킨다고 한다. 그러면 $10z+x+y$ 와 이 수를 3으로 나눈 몫 가운데 적어도 하나는 완전제곱수임을 보여라.

3. $a_1^2+\cdots+a_6^2=2$ 인 양의 실수 a_i $(i=1,2,\ldots,6)$에 대하여 한 변의 길이가 각각 a_i인 여섯 개의 정사각형을 생각하자. 한 변의 길이가 2인 정사각형의 내부(경계포함)에 위의 정사각형들을 내부가 서로 겹치지 않게 넣을 수 있음을 보여라.

4. k와 N은 $k\le N$을 만족시키는 양의 정수라 하자. $1\le i\le k$에 대하여 다음 성질을 만족시키는 $\{1,2,\ldots,N\}$의 부분집합 A_i가 주어져 있다. 이 때, $|A_{j_1}\triangle A_{j_2}\triangle\cdots\triangle A_{j_t}|\ge k$를 만족시키는 부분집합

$$\{j_1,j_2,\ldots,j_t\}\subset\{1,2,\ldots,k\}$$

가 존재함을 보여라. (단, 집합 A, B에 대하여 $A\triangle B=(A\cup B)-(A\cap B)$ 이다.)

> 성질: 공집합이 아닌 임의의 부분집합 $\{i_1,i_2,\ldots,i_s\}\subset\{1,2,\ldots,k\}$ 에 대하여 다음을 만족시킨다.
>
> $$A_{i_1}\triangle A_{i_2}\triangle\cdots\triangle A_{i_s}\ne\varnothing$$

5. 원 O 위에 순서대로 놓인 서로 다른 네 점 A,B,C,D가 있다. 삼각형 ABC의 변 BC에 접하는 방접원의 중심을 O_1, 삼각형 ACD의 변 CD에 접하는 방접원의 중심을 O_2라 하자.

(1) 이 때 세 점 A,B,O_1을 지나는 원의 중심은 원 O의 원주 위에 놓임을 보여라.

(2) 점 C가 호 BD 위를 움직일 때, 때, 세 점 C,O_1,O_2를 지나는 원은 항상 원 O 위의 한 고정점을 지남을 보여라.

∞ 제한시한 4시간 30분; 문항당 7점 ∞