

제 18 회 한국수학올림피아드 - 2차 시험

중 등 부 - 2004년 11월 7일

1. $a_1^2 + \dots + a_5^2 = 2$ 인 양의 실수 a_i ($i = 1, 2, \dots, 5$)에 대하여 한 변의 길이가 각각 a_i 인 다섯 개의 정사각형을 생각하자. 한 변의 길이가 2인 정사각형의 내부(경계 포함)에 위의 정사각형들을 내부가 서로 겹치지 않게 넣을 수 있음을 보여라.

2. $n \geq 3$ 인 양의 정수 n 에 대하여 집합 $S_n = \{1, 2, \dots, n\}$ 이라 하자. 원소의 개수가 모두 짝수인 S_n 의 부분집합 A_1, A_2, \dots, A_n 이 주어져 있다. 그러면

$$A_{i_1} \Delta A_{i_2} \Delta \dots \Delta A_{i_t} = \emptyset$$

를 만족시키는 공집합이 아닌 S_n 의 부분집합 $\{i_1, i_2, \dots, i_t\}$ 가 존재함을 보여라. (단, 집합 A, B 에 대하여 $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$ 이다.)

3. 임의의 소수 p 에 대하여 p 의 배수 가운데 $\frac{x^2 + y + 1}{x + y^2 + 1}$ (단, x, y 는 양의 정수) 꼴의 배수가 무수히 많음을 보여라.

4. 원 O 위에 순서대로 놓인 서로 다른 네 점 A, B, C, D 가 있다. 삼각형 ABC 의 변 BC 에 접하는 방접원의 중심을 O_1 , 삼각형 ABD 의 변 BD 에 접하는 방접원의 중심을 O_2 라 하자. 이 때, 네 점 A, B, O_1, O_2 는 한 원주 위에 놓이며 이 원의 중심은 원 O 의 원주 위에 놓임을 보여라.

5. 임의의 실수 x 에 대하여 관계식 $f(f(x)) - x^2 + x + 3 = 0$ 을 만족시키는 함수 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 는 존재하지 않음을 보여라. (단, \mathbb{R} 은 실수 전체 집합이다.)

⊙ 제한시간 4시간 30분; 문항당 7점 ⊙