

제 18회 한국수학올림피아드 1차시험(고등부)

유형B

1. OMR에는 수험번호와 성명, 지원분야, 문제유형을 반드시 기입하십시오.
특히 문제유형란에 오른쪽 상단에 표시되어 있는 유형을 반드시 기재하십시오.
2. 이 시험은 총 20문항으로 1번부터 10번까지의 5지 선다형 문항과 11번부터 20번까지의 단답형 문항으로 이루어져 있습니다.
5지 선다형 문항은 맞으면 5점, 틀리면 0점, 비워두면 2점을 얻게 됩니다.

1. 10000을 연속되는 두 개 이상의 자연수의 합으로 나타낼 수 있는 경우의 수는 얼마인가? (단 더하는 순서는 무시한다.)

- (1) 3 (2) 4 (3) 5 (4) 6 (5) 10

2. $p^4 - 5p^2 + 9$ 가 소수가 되는 소수 p 의 개수는 얼마인가?

- (1) 2 (2) 4 (3) 7 (4) 15 (5) 무수히 많다

3. 자연수 m, n 이 식 $2m^2 + 2n^2 = 137(m - n)$ 을 만족시킬 때, $m + n$ 의 값은 얼마인가?

- (1) 44 (2) 52 (3) 58 (4) 72 (5) 80

4. 다음 식을 만족시키는 a, b 에 대하여 $\sin^2(a + b)$ 의 값을 기약분수 $\frac{n}{m}$ 으로 나타낼 때, $10m + n$ 의 값을 구하여라.

$$\sin a + \sin b = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos a + \cos b = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

- (1) 21 (2) 43 (3) 81 (4) 83 (5) 163

5. 부등식 $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq c$ 을 만족시키는 모든 실수 a, b (단, $0 \leq a, b \leq 1$)에 대하여, 다음 연립방정식이 실수 해를 갖도록 하는 실수 c 의 최대값은 얼마인가?

$$\begin{cases} a = (1 - x)y \\ b = (1 - y)x \end{cases}$$

- (1) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) 1 (4) $\sqrt{2}$ (5) 2

6. $\overline{AB} = \overline{BC}$ 인 예각 이등변삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 3이다. 점 A와 외접원의 중심 O를 잇는 직선과 변 BC와의 교점 P에 대하여 $\overline{AP} = \frac{21}{4}$ 일 때, 선분 AB의 길이의 제곱은 얼마인가?

- (1) 21 (2) 22 (3) 23 (4) 24 (5) 25

7. 회원이 7명인 어느 동아리의 구성원을 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7로 나타내기로 하자. 이 동아리에는 3명씩으로 구성된 네 개의 위원회 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{3, 4, 5\}$, $D = \{1, 2, 4\}$ 가 있다. 각 위원회에 한 명씩을 추가하여 4명으로 구성할 때, 새로 구성된 어느 두 위원회의 구성원도 완전히 일치하지는 않도록 추가하는 방법의 수는 얼마인가? (단, 같은 사람을 두 개 이상의 위원회에 추가할 수도 있다.)

- (1) 175 (2) 184 (3) 192 (4) 201 (5) 210

8. 1, 2, 3, 4를 사용하여 만든 9 자리의 자연수 중에서 다음 조건을 만족시키는 것의 개수는 얼마인가?

(가) 최고 자리 수는 1이다.
 (나) 같은 숫자가 연속하여 나타나지 않는다.
 (다) 일의 자리 수는 1이 아니다.

- (1) 4460 (2) 4760 (3) 4920 (4) 5120 (5) 5380

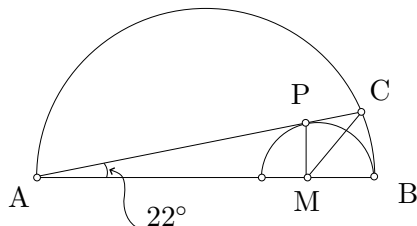
9. 다음 조건을 만족시키는 자연수 m 의 최소값은 얼마인가?

모든 사람이 각각 m 명 이상을 알고 있는 30명의 사람 중에는 모두 서로 아는 4명의 그룹이 항상 있다. (단, a 가 b 를 알면 b 도 a 를 알고 있다.)

- (1) 20 (2) 21 (3) 22 (4) 23 (5) 24

10. 지름이 \overline{AB} 인 원에서 $\angle CAB = 22^\circ$ 인 현 AC를 긋자. 주어진 원에 점 B에서 내접하고, 현 AC에도 접하는 작은 원을 그린다. 작은 원과 직선 AC의 접점 P에서 선분 AB에 그은 수선의 발을 M이라 할 때, $\angle CMB$ 의 크기는 얼마인가?

- (1) 56° (2) 57° (3) 58° (4) 59° (5) 60°



11번부터 20번까지는 단답형 문항들로서 맞으면 5점, 틀리거나 비워두면 0점을 얻게 됩니다. 그리고 각 문항에 대하여 세자리 수로 답하여야 합니다.

예를 들면, 답이 “7”일 경우 표기는 “007”이라고 해야 합니다.

11. 음이 아닌 정수 n 에 대하여 $f(n) = 2004^n$ 이라 하자. $f(0), f^2(0), f^3(0), \dots$ 을 11로 나눈 나머지로 이루어진 집합을 S 라 하자. 이 때, 집합 S 의 모든 원소의 합을 구하여라. (단, f^k 는 f 를 k 번 합성한 함수이다.)
12. 내접하는 원이 그려져 있는 정사각형의 가로와 세로를 각각 50등분하여 2500개의 작은 정사각형으로 나누었다. 원주의 일부가 내부에 그려져 있는 작은 정사각형의 개수를 구하여라.
13. 양수 a, b 에 대하여 식 $a^2 + b + \frac{9}{a+b+1}$ 의 최소값을 기약분수 $\frac{n}{m}$ 으로 나타낼 때, $10m + n$ 의 값을 구하여라.
14. 함수 $f(x) = \sin x$ 와 다음과 같이 정의된 주기가 2π 인 함수 $g(x)$ 에 대하여, 방정식 $(f \circ g)(x) = \frac{x}{2\pi}$ 의 실근의 개수를 구하여라.

$$g(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 4\pi - 2x, & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

15. 상수 함수가 아닌 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 실수 x 에 대하여 $(x^6 - x^5 + x^3 - x + 1)f(x^4) = f(x)$ 이다.

(나) 실수 x 와 y 에 대하여 $f(x+y) = \frac{f(x)f(y)}{(2xy-1)f(x)f(y) + f(x) + f(y)}$ 이다.

함수 $f(x)$ 의 최대값을 기약분수 $\frac{n}{m}$ 으로 나타낼 때 $10m + n$ 의 값을 구하여라.

16. 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_{2002} + a_{2003} + a_{2004}$ 의 값을 구하여라.

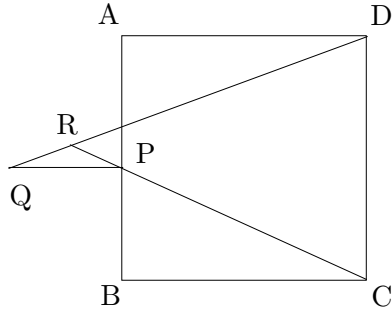
(가) $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1, \quad a_5 = 2,$

(나) $a_{n+5} = \frac{a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4}}{a_n a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} a_{n+4} - 1} \quad (n \geq 1)$

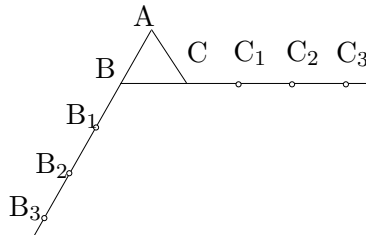
17. 다음 방정식을 만족시키는 2004보다 크지 않은 자연수의 쌍 (x, y) 의 개수를 구하여라. (단 $[t]$ 는 t 를 넘지 않는 가장 큰 정수이다.)

$$\left[\frac{x^2}{y} \right] + \left[\frac{y^2}{x} \right] = \left[\frac{x^2 + y^2}{xy} \right] + xy$$

18. 한 변의 길이가 13인 정사각형 ABCD에서 $\overline{BP} = 6$ 인 점 P를 변 AB 위에 잡는다. 점 P에서 변 BC에 평행한 직선을 긋고 이 직선 위에 $\overline{QP} = 6$ 이 되도록 점 Q를 사각형 ABCD의 외부에 잡는다. 직선 QD와 직선 PC의 교점을 R라 할 때 삼각형 PQR의 외접원의 반지름의 길이의 제곱을 구하여라.



19. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC의 변 AB와 BC 각각의 연장선에 간격이 1인 점들이 찍혀 있다. 선분 B_1C_3 의 수직이등분선과 선분 B_3C_1 의 수직이등분선의 교점을 P라고 할 때, 선분 BP의 길이를 구하여라.



20. 다음을 만족시키는 사각형 ABCD가 있다.

$$\overline{AB} = 5, \overline{BC} = 6, \overline{CD} = 7, \cos \angle B = \frac{1}{5}, \cos \angle C = -\frac{3}{7}$$

그림과 같이 이 사각형의 외부에 정사각형을 그리면 네 개의 빗금친 삼각형을 얻는다. 그림에서 네 선분 AP, BQ, CR, DS는 각각 빗금친 삼각형의 중선이다. 이 네 중선의 길이의 합을 구하여라.

