

제 18회 한국수학올림피아드 1차시험(중등부)

유형B

1. OMR에는 수험번호와 성명, 지원분야, 문제유형을 반드시 기입하십시오.
특히 문제유형란에 오른쪽 상단에 표시되어 있는 유형을 반드시 기재하십시오.
2. 이 시험은 총 20문항으로 1번부터 10번까지의 5지 선다형 문항과 11번부터 20번까지의 단답형 문항으로 이루어져 있습니다.
5지 선다형 문항은 맞으면 5점, 틀리면 0점, 비워두면 2점을 얻게 됩니다.

1. 자연수 a, k 에 대하여 $\{a\}_k$ 는 다음 성질을 만족시키는 정수라 정의하자.

$$\frac{a}{10^k} - \frac{1}{2} < \{a\}_k \leq \frac{a}{10^k} + \frac{1}{2}.$$

$\langle a \rangle_k = 10^k \cdot \{a\}_k$ 라 할 때, $\langle \langle a \rangle_1 \rangle_2 = 2000$ 을 만족시키는 자연수 a 의 개수는 얼마인가?

- (1) 99 (2) 100 (3) 101 (4) 199 (5) 1000

2. 10000을 연속되는 두 개 이상의 자연수의 합으로 나타낼 수 있는 경우의 수는 얼마인가? (단, 더하는 순서는 무시한다.)

- (1) 12 (2) 10 (3) 8 (4) 6 (5) 4

3. 실수 a, b, c 가 임의의 실수 x, y, z 에 대하여 다음 부등식을 만족시킬 때, $3a + 2b - c$ 의 최대값은 얼마인가?

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + axz + byz + cz^2 \geq 0$$

- (1) 48 (2) 49 (3) 50 (4) 51 (5) 52

4. $a + b = 1$ 을 만족시키는 양수 a, b 에 대하여 $\frac{1}{1+a} + \frac{a}{1+b}$ 의 최소값은 얼마인가?

- (1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (4) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (5) 1

5. 일렬로 배열된 20개의 의자에 8개의 구별되지 않는 공을 얹어 놓으려고 한다. 이웃하는 공 사이에 홀수 개의 빈 의자가 있도록 얹어 놓는 방법의 수를 구하여라.

- (1) 45 (2) 90 (3) 725 (4) 62985 (5) 125970

6. 동전을 20번 던졌을 때, 뒷면이 6번 나오고 앞면이 연속해서 5번 이상 나오지 않는 경우의 수는 얼마인가?

- (1) 2674 (2) 4800 (3) 6216 (4) 8135 (5) 10011

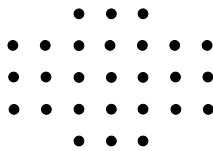
7. $\angle A = 72^\circ$ 인 삼각형 ABC의 내부의 점 M에 대하여 $\angle BMC = 148^\circ$ 이다. 점 M에서 세 변 BC, CA, AB에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 할 때, $\angle FDE$ 의 크기는 얼마인가?

- (1) 74° (2) 76° (3) 78° (4) 80° (5) 82°

8. 어떤 볼록다면체의 각 면이 삼각형, 사각형, 오각형 또는 육각형이라 하자. 이 다면체에 삼각형 면이 두 개, 사각형 면이 한 개 있을 때, 다음 중 옳은 것은 어느 것인가?

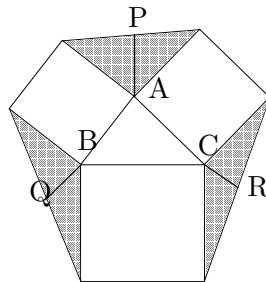
- (1) 오각형 면은 세 개, 육각형 면은 두 개 있을 수 있다.
 (2) 오각형 면은 두 개, 육각형 면은 세 개 있을 수 있다.
 (3) 오각형 면은 네 개, 육각형 면은 한 개 있을 수 있다.
 (4) 오각형 면은 두 개, 육각형 면은 두 개 있을 수 있다.
 (5) 오각형 면은 한 개, 육각형 면은 네 개 있을 수 있다.

9. 다음 그림과 같이 가로와 세로의 간격이 1이 되도록 점들이 배열되어 있을 때, 이 중의 세 점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 개수는 얼마인가?



- (1) 2925 (2) 2901 (3) 2732 (4) 2744 (5) 2658

10. 다음 그림과 같이 세 변의 길이가 각각 5, 6, 7인 삼각형 ABC의 외부에 세 개의 정사각형을 그리면 세 개의 빗금친 삼각형을 얻는다. 그림에서 세 선분 \overline{AP} , \overline{BQ} , \overline{CR} 는 각각 빗금친 삼각형의 중선이다. 이 세 중선의 길이의 합은 얼마인가?



- (1) 8 (2) $\frac{17}{2}$ (3) 9 (4) $\frac{19}{2}$ (5) 10

11번부터 20번까지는 단답형 문항들로서 맞으면 5점, 틀리거나 비워두면 0점을 얻게 됩니다. 그리고 각 문항에 대하여 세자리 수로 답하여야 합니다.

예를 들면, 답이 “7” 일 경우 표기는 “007” 이라고 해야 합니다.

11. $1 \leq n \leq 100$ 인 자연수 n 에 대하여 $(n-1)!$ 이 n 으로 나누어 떨어지는 자연수 n 의 개수를 구하여라. (단, $0! = 1$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ 이다.)

12. 1보다 큰 정수 a, b 가 $a^{9a} = b^{2b}$ 를 만족시킬 때, $2a + b$ 의 최소값을 구하여라.

13. 다음 방정식을 만족시키는 자연수 m, n 이 무수히 많을 때, 정수 a 의 값을 구하여라.

$$\frac{m^2 - n^2 - 6n - 14}{m + n + 2} = a$$

14. 다음 수에 가장 가까운 정수를 구하여라.

$$\sqrt{13} + \sqrt{15} + \sqrt{17} + \sqrt{19} + \sqrt{21} + \sqrt{23}$$

15. 방정식 $[x] + \frac{2004}{[x]} = x^2 + \frac{2004}{x^2}$ 의 1이 아닌 해를 a 라 할 때, a^2 의 값을 구하여라. (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 가장 큰 정수이다.)

16. 다음을 만족시키는 함수 $f(x)$ 에 대하여, $f(-9)$ 의 값을 기약분수 $\frac{n}{m}$ 으로 나타낼 때, $10m + n$ 의 값을 구하여라.

$$f(3) = 1, \quad (x^2 - x + 1)f(x^2) = f(x)$$

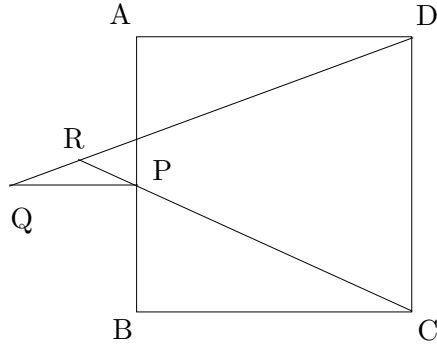
17. 다음 두 조건을 만족시키는 자연수 n 의 개수를 구하여라.

(가) n 은 20보다 큰 소수로 나누어 떨어지지 않는다.

(나) n 은 어떤 소수의 제곱으로도 나누어 떨어지지 않는다.

18. 원탁에 둘러 앉아있는 12명 중에서 4명의 위원을 뽑으려고 한다. 인접하여 앉아있는 사람은 함께 선출될 수는 없다고 할 때, 위원을 뽑는 방법의 수를 구하여라.

19. 한 변의 길이가 13인 정사각형 ABCD에서 $\overline{BP} = 6$ 인 점 P를 변 AB 위에 잡는다. 점 P에서 변 BC에 평행한 직선을 긋고 이 직선 위에 $\overline{QP} = 6$ 이 되도록 점 Q를 사각형 ABCD의 외부에 잡는다. 직선 QD와 직선 PC의 교점을 R라 할 때 삼각형 PQR의 외접원의 반지름의 길이의 제곱은 얼마인가?



20. 평면도, 정면도, 우측면도가 다음과 같은 입체의 부피를 구하여라. (단, 굵게 표시된 점들의 가로와 세로 간격은 3이고, 점선은 가려서 보이지 않는 모서리를 나타낸다.)

