

제 19 회 한국수학올림피아드 1 차시험 (고등부)

2005년 5월 29일; 제한시간 4시간; 문항당 5점 문제유형 B

* OMR 카드에는 수험번호, 성명, 지원분야, 문제유형을 반드시 기입하십시오.
특히, 문제유형란에는 시험지 우측 상단의 문제유형을 기입하여야 합니다.

* 1 번부터 10 번까지는 객관식 5 지선다형입니다. 객관식문제는 맞으면 5 점,
틀리면 0 점, 비워두면 2 점입니다.

1. 세 변의 길이가 각각 15, 20, 25 인 삼각형 ABC 의 내접원이 삼각형 ABC 와 점 X, Y, Z 에서 접한다. 삼각형 XYZ 의 넓이는?
(1) 28 (2) 30 (3) 32 (4) 34 (5) 36

2. 볼록 n -각형의 모든 변과 모든 대각선을 빨간색 또는 파란색으로 칠하였다
니 빨간색 선분의 개수와 파란색 선분의 개수가 같았다. 다음 중 n 이 될 수
있는 두 수로 이루어진 것은?
(1) 2005,2006 (2) 2006,2007 (3) 2007,2008 (4) 2008,2009 (5) 2009,2010

3. 200 보다 작은 서로 다른 여섯 개의 소수가 작은 것부터 차례로 등차수열을
이룬다고 할 때, 이 수열의 공차는?
(1) 6 (2) 10 (3) 18 (4) 20 (5) 30

4. 모든 양의 실수 x 에 대하여, $\frac{1}{2+x^2} \geq \frac{y-x}{2y+x}$ 를 만족시키는 y 의 최대값은?
(1) $\sqrt{11}$ (2) $2\sqrt{3}$ (3) $\sqrt{13}$ (4) $3\sqrt{2}$ (5) $2\sqrt{5}$

5. 방정식 $x(x - [x]) = 1$ 의 해를 작은 것부터 차례로 x_1, x_2, x_3, \dots 라 할 때, $(2x_1 - 1)^2 + (2x_2 - 2)^2 + \dots + (2x_{10} - 10)^2$ 의 값은? (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 가장 큰 정수를 나타낸다.)

- (1) 425 (2) 430 (3) 435 (4) 440 (5) 445

6. 함수 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 을 생각하자. $f(5) \neq 0$ 이고, 임의의 실수 x, y (단, $y \neq 0$)에 대하여 $f(x+y)f(x-y) = 2|y|f\left(\frac{x^2-y^2+25}{2y}\right)$ 일 때, $f(1)f(25)$ 의 값은? (단, \mathbb{R} 은 실수 전체의 집합이다.)

- (1) 125 (2) 130 (3) 135 (4) 140 (5) 145

7. 방정식 $n(m^2 + n^2 - 1) - m(m^2 + n^2 + 47) = 0$ 을 만족시키는 양의 정수쌍 (m, n) 의 집합을 $A = \{(m_i, n_i) \mid i = 1, 2, \dots, k\}$ 라 할 때 $m_1 + m_2 + \dots + m_k$ 의 값은?

- (1) 1 (2) 8 (3) 24 (4) 28 (5) 51

8. 다음 중, 정수 n 에 대하여 $n^2 - 2n + 4$ 꼴의 배수를 가질 수 없는 소수는?

- (1) 29 (2) 31 (3) 37 (4) 43 (5) 61

9. $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 30^\circ$ 인 삼각형 ABC 의 내부에 있는 점 P 가 $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$ 를 만족시킬 때, $\sin^2(\angle PAB)$ 의 값은?

- (1) $\frac{1}{19}$ (2) $\frac{3}{19}$ (3) $\frac{16}{19}$ (4) $\frac{1}{4}$ (5) $\frac{3}{4}$

10. 원을 6 개의 합동인 부채꼴로 나누어 각 부채꼴을 빨강, 파랑, 노랑, 초록 4 개의 색 중 하나의 색으로 칠하기로 하자. 같은 색을 여러 번 사용할 수는 있지만, 이웃한 부채꼴은 다른 색으로 칠하여야 한다. 원을 칠하는 서로 다른 방법의 수를 구하여라. (단, 원을 회전시켜 같아지는 칠하기는 같은 것으로 간주한다.)

(1) 130 (2) 140 (3) 150 (4) 160 (5) 170

* 11 번부터 20 번까지는 주관식 단답형입니다. 주관식문제는 맞으면 5 점, 틀리면 0 점입니다. 그리고 주관식 문제의 답은 반드시 세 자리수로 답해야 합니다. 예를 들면, 답이 7 인 경우, OMR 카드에는 007 로 표기합니다.

11. 256 이하의 양의 정수 중, 2 진법으로 표현했을 때 1 이 홀수번 나타나는 것들의 총합을 나누는 가장 큰 홀수를 구하여라.
12. 서로 다른 세 개의 복소수 a 와 b 와 c 에 대하여, $a^3 = 20a^2 + b^2 + c^2 - a - 340$, $b^3 = 20b^2 + c^2 + a^2 - b - 340$, $c^3 = 20c^2 + a^2 + b^2 - c - 340$ 일 때, abc 의 값을 구하여라.
13. 직사각형 $ABCD$ 의 내부의 점 P 에 대하여, $\angle APD = 110^\circ$, $\angle BPC = 70^\circ$, $\angle PCB = 30^\circ$ 이다. $\angle PAD = a^\circ$ 라 할 때, a 의 값을 구하여라.
14. 양의 정수 n 에 대하여, $2n$ 자리수 $a = (a_1a_2 \cdots a_n a_{n+1} \cdots a_{2n})_{(10)}$ 을 생각하자. 이 수에 대하여, $2n$ 자리수 b 를 $b = (a_{n+1}a_{n+2} \cdots a_{2n}a_1 \cdots a_n)_{(10)}$ 이라 정의하면 $3a = 4b$ 를 만족시킨다고 한다. 이러한 성질을 만족시키는 양의 정수 a 가운데 두번째로 작은 것을 A 라 할 때, $7A$ 의 각 자리의 숫자의 합을 구하여라. (단, $a = (\cdots)_{(10)}$ 은 a 의 10 진법 표현을 나타낸다.)

15. 좌표평면의 점 (a, b) 에서 점 $(a+1, b)$ 로 이동하는 방법을 x -스텝, 점 (a, b) 에서 점 $(a, b+1)$ 로 이동하는 방법을 y -스텝, 점 (a, b) 에서 점 $(a+1, b+1)$ 로 이동하는 방법을 d -스텝이라 하자. 이 세 가지 스텝만을 이용하여 점 $(0, 0)$ 에서 점 $(4, 4)$ 로 이동하는 가능한 모든 경로들에서 사용된 d -스텝들의 총 횟수를 구하여라.
16. 2005 이하의 양의 정수 n 중에서 $2n^2 + 3n + 1$ 과 $3n^2 + 2n + 3$ 이 서로 소가 되도록 하는 것들의 개수를 구하여라.
17. 이차 방정식 $(bc - 1)x^2 + (a - b + c - abc)x + ab - 1 = 0$ 이 정수근을 갖도록 하는 양의 정수 a, b, c 에 대하여 $100a + 10b + c$ 의 최대값을 구하여라.
18. 중심이 O 이고 반지름의 길이가 $16\sqrt{2}$ 인 원과 중심이 O_1 이고 반지름의 길이가 $8\sqrt{2}$ 인 원이 두 점에서 만난다. 두 원의 공통접선 ℓ 이 원 O 와 점 A 에서 접하고 원 O_1 과 점 B 에서 접한다. 두 원의 교점 중에서 공통접선 ℓ 에서 더 멀리 떨어져 있는 점에서의 원 O_1 의 접선이 A 를 지난다고 할 때, 선분 OO_1 의 길이를 구하여라.
19. 1 번부터 2005 번까지 번호가 매겨진 2005 개의 카드를 1 번 카드가 맨 위, 그 아래 2 번 카드, 그 아래 3 번 카드, ..., 2005 번 카드가 맨 아래에 오도록 쌓은 카드 더미가 있다. 이제, 2005 번 카드부터 시작하여 카드 더미의 맨 아래의 카드는 버리고, 다음 카드는 카드 더미의 맨 위로 보내고, 다시 맨 아래 카드는 버리고, 다음 카드는 카드 더미 맨 위로 보내는 식의 작업을 계속하기로 하자. 마지막으로 남은 카드의 번호를 구하여라.
20. 한 변의 길이가 1 인 정사각형 $ABCD$ 에서 점 $X(\neq C)$ 는 변 BC 위의 점이고 점 $Y(\neq C)$ 는 변 CD 위의 점이라 하자. 삼각형 XCY 의 둘레의 길이가 2 이고, $\angle DAY = 10^\circ$ 이다. $\angle YXC = x^\circ$ 라 할 때, x 의 값을 구하여라.