

제 19 회 한국수학올림피아드 1 차시험 (중등부)

2005년 5월 29일; 제한시간 4시간; 문항당 5점 문제유형 B

* OMR 카드에는 수험번호, 성명, 지원분야, 문제유형을 반드시 기입하십시오.
특히, 문제유형란에는 시험지 우측 상단의 문제유형을 기입하여야 합니다.

* 1 번부터 10 번까지는 객관식 5 지선다형입니다. 객관식문제는 맞으면 5 점,
틀리면 0 점, 비워두면 2 점입니다.

1. 삼각형 ABC 에서 세 변 BC, CA, AB 의 중점을 각각 K, L, M 이라 하자.
 $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 200$ 일 때, $AK^2 + BL^2 + CM^2$ 의 값은?

(1) 120 (2) 135 (3) 150 (4) 175 (5) 180

2. 세 자리 양의 정수 n 의 각 자리의 숫자의 합을 $S(n)$ 이라 하자. $S(n) \leq 5$ 이
고, n 이 $S(n)$ 의 배수가 되는 n 의 개수는?

(1) 14 (2) 15 (3) 16 (4) 17 (5) 18

3. 정숙이가 정팔각형의 변을 따라 움직이는 로봇트를 만들었다. 이 로봇트는
정팔각형의 한 변을 지나가는데 1 분이 걸리며, 각 꼭지점에서는 가던 방
향으로 계속 가거나 반대 방향으로 방향을 바꿀 수 있다고 한다. 이 로봇트가
한 꼭지점 A 에서 출발하여 8 분 동안 계속 움직여 꼭지점 A 의 반대편 꼭지
점에 도달할 수 있는 경우의 수는?

(1) 21 (2) 30 (3) 36 (4) 42 (5) 56

4. 조건 $2 \leq x \leq 4$, $x \leq y$, $3 \leq y \leq 5$ 를 만족시키는 실수 x, y 에 대하여, $\frac{2+xy}{x+y}$ 의 최대값은?

- (1) $\frac{11}{6}$ (2) $\frac{9}{4}$ (3) $\frac{22}{9}$ (4) $\frac{5}{2}$ (5) $\frac{8}{3}$

5. 다음 중, 정수 x, y, z 에 대하여 $x^2 + y^2 + 5z^2$ 꼴로 쓸 수 없는 정수는?

- (1) 2003 (2) 2004 (3) 2005 (4) 2020 (5) 2046

6. 삼각형 ABC 에서 $\angle A = 30^\circ$, $AB = AC$ 이다. 점 A 에서 변 BC 에 그은 수선과 점 B 에서 변 AC 에 그은 수선의 교점을 P , 삼각형 ABP 의 외접원과 변 AC 의 교점 중 A 가 아닌 점을 Q 라고 할 때, $\angle PQC$ 의 크기는?

- (1) 56° (2) 58° (3) 60° (4) 62° (5) 64°

7. 정수 $10^{6015} - 10^{1203} - 10^{15} + 10^k$ 이 2005 의 배수가 되도록 하는 최소의 양의 정수 k 는?

- (1) 3 (2) 9 (3) 15 (4) 27 (5) 36

8. 현선이 해돋이 구경을 가서 해의 사진을 찍었다. 다녀와서 1mm 마다 눈금이 그어진 2006 mm×2006 mm 크기의 모눈종이에 지름 2005mm 인 원 모양의 해의 사진을 인화하였다. 해의 중심이 모눈종이의 중심과 일치한다고 할 때, 해의 둘레가 지나가는 모눈종이의 (1mm×1mm 크기의) 정사각형의 개수는?

- (1) 2005 (2) 4000 (3) 4024 (4) 8020 (5) 8024

9. 함수 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 가 $f(x) + f(1-x) = 7$ 과 $x + f\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2}f(x)$ 를 만족시킬 때, $f\left(\frac{1}{9}\right)$ 의 값은? (단, \mathbb{R} 은 실수 전체의 집합이다.)

- (1) $\frac{5}{12}$ (2) $\frac{7}{12}$ (3) $\frac{3}{4}$ (4) $\frac{11}{12}$ (5) $\frac{13}{12}$

10. 사각형 $ABCD$ 에서 $\angle A = 90^\circ, \angle B = 75^\circ, \angle C = 90^\circ, \angle D = 105^\circ$ 이다. 두 대각선 AC 와 BD 의 교점 X 가 $\angle BXA = 105^\circ$ 를 만족시킬 때, 선분의 길이의 비 $BX : XD$ 는?

- (1) $\sqrt{3} : 1$ (2) $\sqrt{3} : \sqrt{2}$ (3) $\sqrt{2} : \sqrt{3}$ (4) $\sqrt{2} : 1$ (5) $\sqrt{3} : 2$

* 11 번부터 20 번까지는 주관식 단답형입니다. 주관식문제는 맞으면 5 점, 틀리면 0 점입니다. 그리고 주관식 문제의 답은 반드시 세 자리수로 답해야 합니다. 예를 들면, 답이 5 인 경우, OMR 카드에는 005 로 표기합니다.

11. 실수 x 에 대하여, $x^2 + \frac{16}{x^2+1}$ 의 최소값을 구하여라.

12. 정수 k 에 대하여, 방정식 $x^3 = 14 + k$ 의 실근에 가장 가까운 정수를 a_k 라 할 때, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ 를 구하여라.

13. 양의 정수 a, b 에 대하여, $y = (x - a)^2$ 의 그래프와 $y = b^2 - x^2$ 의 그래프의 두 교점과 두 그래프의 y -축과의 교점들을 꼭지점으로 하는 사각형의 넓이가 $12\sqrt{7}$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라. (단, $a < b$ 이다.)

14. $18x + 19y = 2005$ 를 만족시키는 양의 정수쌍 (x, y) 의 개수를 구하여라.

15. 여러 사람이 모인 자리에서 서로 아는 사람끼리만 한 번씩 악수를 하였다고 하자. 각 사람마다 악수한 횟수가 모두 같고 전체 악수의 횟수가 2005 번일 때, 모인 사람의 수가 될 수 있는 가장 작은 수를 구하여라.
16. 볼록사각형 $ABCD$ 에서 $AB = AC = AD$, $\angle CAB = 90^\circ$ 이다. 두 대각선 AC 와 BD 의 교점 M 에 대하여 $AM = 2, MC = 1$ 이라 할 때, $13BD^2$ 을 구하여라.
17. 양의 정수 d 에 대하여, d 가 $4a^2 + 9b^2$ 과 ab 의 최대공약수가 되도록 하는 서로 소인 양의 정수 a, b 가 존재한다고 한다. 이러한 d 의 개수를 구하여라.
18. 양의 정수 전체의 집합에서 정의된 함수 f 를 생각하자. $f(1) = 5$ 이고, 임의의 양의 정수 n 에 대하여 $f(n+1)(f(n) - 4) = f(n) - 6$ 이다. $f(2005) = \frac{q}{p}$ 로 표현할 때, p 를 31로 나눈 나머지를 구하여라. (단, p 와 q 는 서로 소인 양의 정수이다.)
19. $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC 와 변 AB 위의 세 점 X_1, X_2, X_3 에 대하여 $\angle ACX_1 = \angle X_1CX_2 = \angle X_2CX_3 = \angle X_3CB$ 이고, $BX_3 = 2AX_1$ 이다. 삼각형 ABC 의 가장 작은 각의 크기를 a° 라 할 때, $7a$ 의 값을 구하여라.
20. 정육각형 모양의 같은 크기의 타일이 빈틈 없이 깔려 있는 어떤 목욕탕의 바닥에서, 가장자리로부터 여러 개의 타일을 뜯어내었다. 남아 있는 타일들이 이루는 도형을 살펴 보았더니, 바깥 변의 개수가 34 개였다. 두 개의 타일이 만나는 꼭지점은 14 개이고, 세 개의 타일이 만나는 꼭지점은 8 개라고 한다. 이때, 남아 있는 타일의 개수를 구하여라. (단, 붙어 있는 타일들은 변을 공유하면서 붙어 있다고 가정한다.)