

제 19 회 한국수학올림피아드 - 2차시험

고등부

2005년 9월 25일 (오후)

5. 원  $O$ 의 외부에 있는 점  $P$ 를 지나는 한 직선이 원  $O$ 와 두 점  $A, B$ 에서 만나고,  $P$ 를 지나는 또 다른 직선이 원  $O$ 와 두 점  $C, D$ 에서 만난다. 단,  $A$ 는  $P$ 와  $B$  사이에,  $C$ 는  $P$ 와  $D$  사이에 있다. 선분  $AD$ 와  $BC$ 의 교점을  $L$ 이라 하고, 반직선  $PA$  위에  $BL \cdot PE = DL \cdot PD$ 가 되도록 점  $E$ 를 잡자. 직선  $PL$ 과 직선  $DE$ 의 교점을  $M$ 이라 할 때,  $M$ 은 선분  $DE$ 의 중점임을 보여라.

6. 실수  $x_1, x_2, \dots, x_n$ 이  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$ 을 만족할 때, 부등식

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} + \dots + \frac{x_n}{1+x_1^2+\dots+x_n^2} < \sqrt{\frac{n}{2}}$$

이 성립함을 보여라.

7. 양의 정수  $n$ 에 대하여,  $n^2 + n + 1$ 의 약수의 개수를  $f(n)$ 이라 할 때,  $f(n) \geq f(n+1)$ 인 양의 정수  $n$ 이 무한히 많이 존재함을 보여라.

8. 어느 학교에서 6명의 학생들이 다음과 같은 원칙에 따라 ‘공부모임’과 ‘봉사활동모임’을 만들고자 한다.

각 모임은 반드시 3명으로 구성되며, 6명의 학생 중 임의의 두 학생에 대하여 이 두 학생이 함께 속한 공부모임의 수와 봉사활동모임의 수는 같다.

최소한 한 개의 모임은 있다고 가정하고, 구성원 3명이 모두 같은 공부모임과 봉사활동모임은 없다고 할 때, 공부모임의 수와 봉사활동모임의 수의 합의 최소값을 구하여라.

제한 시간 2시간 30분(4문제)

문항 당 7점