

제 19 회 한국수학을 올림피아드 - 2 차 시험

중등부

2005년 9월 25일 (오후)

5. 삼각형 ABC 에 대하여 $\angle BAC$ 의 이등분선이 삼각형 ABC 의 외접원과 만나는 점을 M , CM 과 AB 의 교점을 P 라 하자. P 를 지나고 AM 과 수직인 직선이 AC 와 만나는 점을 X , P 를 지나고 AC 와 수직인 직선이 AM 와 만나는 점을 Y , P 를 지나고 BC 와 수직인 직선이 MB 와 만나는 점을 Z 라 하자. 세 점 X, Y, Z 가 한 직선 위에 있음을 보여라. (단, $\angle B$ 는 $\angle C$ 보다 크다.)

6. 서로 다른 소수 p, q 에 대하여 $S_{p,q} = \{p, q, pq\}$ 라 정의하자. 집합 $S_{p,q}$ 의 임의의 두 원소가 $x^2 + 2005y^2$ (단, x, y 는 정수) 꼴이면 나머지 한 원소도 그러한 꼴로 나타낼 수 있음을 보여라.

7. 양수 x_1, x_2, \dots, x_n 이 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ 을 만족할 때, 부등식

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_1+\dots+x_n} < \sqrt{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

이 성립함을 보여라.

8. 어느 학교에서 6명의 학생들이 다음과 같은 원칙에 따라 ‘공부모임’과 ‘봉사활동모임’을 만들고자 한다.

각 모임은 반드시 3명으로 구성되며, 6명의 학생 중 임의의 두 학생에 대하여 이 두 학생이 함께 속한 공부모임의 수와 봉사활동모임의 수는 같다.

최소한 한 개의 모임은 있다고 가정하고, 구성원 3명이 모두 같은 공부모임과 봉사활동모임은 없다고 할 때, 공부모임의 수와 봉사활동모임의 수의 합은 8 이상임을 보여라.

제한 시간 2시간 30분(4문제)

문항 당 7점