

제 19 회 한국수학을 올림피아드 - 2 차 시험

중등부

2005년 9월 25일 (오후)

5. 삼각형  $ABC$ 에 대하여  $\angle BAC$ 의 이등분선이 삼각형  $ABC$ 의 외접원과 만나는 점을  $M$ ,  $CM$ 과  $AB$ 의 교점을  $P$ 라 하자.  $P$ 를 지나고  $AM$ 과 수직인 직선이  $AC$ 와 만나는 점을  $X$ ,  $P$ 를 지나고  $AC$ 와 수직인 직선이  $AM$ 와 만나는 점을  $Y$ ,  $P$ 를 지나고  $BC$ 와 수직인 직선이  $MB$ 와 만나는 점을  $Z$ 라 하자. 세 점  $X, Y, Z$ 가 한 직선 위에 있음을 보여라. (단,  $\angle B$ 는  $\angle C$ 보다 크다.)

6. 서로 다른 소수  $p, q$ 에 대하여  $S_{p,q} = \{p, q, pq\}$ 라 정의하자. 집합  $S_{p,q}$ 의 임의의 두 원소가  $x^2 + 2005y^2$  (단,  $x, y$ 는 정수) 꼴이면 나머지 한 원소도 그러한 꼴로 나타낼 수 있음을 보여라.

7. 양수  $x_1, x_2, \dots, x_n$ 이  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ 을 만족할 때, 부등식

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_1+\dots+x_n} < \sqrt{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

이 성립함을 보여라.

8. 어느 학교에서 6명의 학생들이 다음과 같은 원칙에 따라 ‘공부모임’과 ‘봉사활동모임’을 만들고자 한다.

각 모임은 반드시 3명으로 구성되며, 6명의 학생 중 임의의 두 학생에 대하여 이 두 학생이 함께 속한 공부모임의 수와 봉사활동모임의 수는 같다.

최소한 한 개의 모임은 있다고 가정하고, 구성원 3명이 모두 같은 공부모임과 봉사활동모임은 없다고 할 때, 공부모임의 수와 봉사활동모임의 수의 합은 8 이상임을 보여라.

제한 시간 2시간 30분(4문제)

문항 당 7점