

## 제 19 회 한국수학올림피아드 - 2차 시험

고등부  
2005년 9월 25일 (오전)

1. 어떤 적당한 서로 소인 양의 정수  $a, b$ 에 대하여,  $a+b$ 와  $\frac{a^{2005} + b^{2005}}{a+b}$ 의 최대공약수가 될 수 있는 정수를 모두 구하여라.
2. 삼각형  $ABC$ 에 대하여  $\angle BPA + \angle AQC = 90^\circ$ 를 만족하는 점  $P, Q$ 가 있다. 단, 두 삼각형  $BAP$ 와  $ACQ$ 의 세 꼭지점은 반시계방향으로 (또는 시계방향으로) 모두  $B, A, P$ 와  $A, C, Q$ 의 순으로 놓여 있다 하자. 이 두 삼각형의 두 외접원의 교점을  $N$  ( $A \neq N$ , 단, 두 원의 교점이  $A$  뿐일 때는  $A = N$ .), 선분  $BC$ 의 중점을  $M$ 이라 할 때, 선분  $MN$ 의 길이는  $P, Q$ 에 상관없이 항상 일정함을 보여라.
3. 양의 정수  $K$ 에 대하여, 수열  $\{a_n\}$ 을 다음과 같이 정의하자.

$$a_1 = K$$

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 1, & a_n \text{이 짝수인 경우,} \\ \frac{a_n - 1}{2}, & a_n \text{이 홀수인 경우.} \end{cases} \quad (n \geq 1)$$

수열  $a_1, a_2, \dots$  중에서 처음으로 0이 되는 항이  $a_{2005}$ 가 되도록 하는  $K$ 의 최소값을 구하여라.

4. 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(x) \geq 0$ 이고, 모든 실수  $x, y$ 에 대하여

$$f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) - 2y^2 = 0$$

인 함수  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 를 모두 구하여라. 단  $\mathbb{R}$ 은 실수의 집합이다.

제한 시간 2시간 30분(4문제)

문항 당 7점