

제 19 회 한국수학올림피아드 - 2 차 시험

중등부
2005년 9월 25일 (오전)

1. 분모가 2005 이하인 기약분수 중에서 $\frac{9}{25}$ 와 가장 가까운 분수를 구하여라.
2. 삼각형 ABC 에 대하여 $\angle BPA + \angle AQC = 90^\circ$ 를 만족하는 점 P, Q 가 있다. 단, 두 삼각형 BAP 와 ACQ 의 세 꼭지점은 반시계방향으로 (또는 시계방향으로) 모두 B, A, P 와 A, C, Q 의 순으로 놓여 있다 하자. 이 두 삼각형의 두 외접원의 교점을 N ($A \neq N$, 단, 두 원의 교점이 A 뿐일 때는 $A = N$), 선분 BC 의 중점을 M 이라 할 때, 선분 MN 의 길이는 P, Q 에 상관없이 항상 일정함을 보여라.
3. 양의 정수 K 에 대하여, 수열 $\{a_n\}$ 을 다음과 같이 정의하자.

$$\begin{aligned}
 a_1 &= K \\
 a_{n+1} &= \begin{cases} a_n - 1, & a_n \text{이 홀수인 경우,} \\ \frac{a_n}{2}, & a_n \text{이 짝수인 경우.} \end{cases} \quad (n \geq 1)
 \end{aligned}$$

수열 a_1, a_2, \dots 중에서 처음으로 0이 되는 항이 a_{2005} 가 되도록 하는 K 의 최소값을 구하여라.

4. 어느 시험에서 채점을 한 결과, 어떠한 두 개의 문제를 선택하여도 이 두 문제 중 한 문제만을 푼 학생은 항상 6명 이상이었다. 시험을 본 학생이 11명이었다면 출제된 문제의 개수가 12 이하임을 보여라. (단, 등호조건을 보일 필요는 없음.)

제한 시간 2시간 30분(4문제)

문항 당 7점