제 11 회 한국수학올림피아드 2차 시험

제 1 일 1998년 4월 18일

1. $(\ell+m+n)(\frac{1}{\ell}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n})$이 자연수이고 ℓ, m과 m, n과 n, ℓ이 각각 서로 소인 세 자연수 ℓ, m, n을 모두 구하라.

2. 원 O에 내접하는 $\triangle ABC$의 세 변 BC, CA, AB 위의 꼭지점이 아닌 임의의 점 D, E, F를 각각 잡고, 선분 AD, BE, CF의 연장선이 원 O와 만나는 점을 각각 P, Q, R이라고 할 때
$$\frac{AD}{PD}+\frac{BE}{QE}+\frac{CF}{RF} \geq 9$$
임을 증명하고, 등호가 성립하는 경우의 삼각형의 모양과 점 D, E, F의 위치를 밝혀라.

3. 자연수 n에 대하여 n과 서로 소인 n 이하의 자연수의 개수를 $\phi(n)$, n의 소인수의 개수를 $\psi(n)$이라고 하자. $\phi(n)$이 $n-1$의 약수이고 $\psi(n) \leq 3$이면 n이 소수임을 증명하라.

제한시간 4시간 30분
문항당 7점

제 11 회 한국수학올림피아드 2차 시험

제 2 일 1998년 4월 19일

4. $a+b+c=abc$를 만족시키는 양의 실수 a, b, c에 대하여

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \le \frac{3}{2}$$

임을 증명하고, 등호가 성립하는 경우를 찾아라.

5. $\triangle ABC$의 내심을 I, 점 B를 지나고 I에서 직선 CI에 접하는 원을 O_1, 점 C를 지나고 I에서 직선 BI에 접하는 원을 O_2라고 하자. $\triangle ABC$의 외접원과 원 O_1, O_2는 한 점에서 만남을 증명하라.

6. 자연수 n에 대하여 다음의 두 조건을 만족시키는 전단사(일대일 대응) 함수 $f:\{1,2,\cdots,n\}\to\{1,2,\cdots,n\}$전체의 집합을 F_n이라고 하자.
   (1) $f(k)\le k+1 \quad (k=1,2,\cdots,n-1)$,
   (2) $f(k)\ne k \quad (k=2,\cdots,n)$.
   F_n의 원소 f를 임의로 뽑을 때 $f(1)\ne 1$일 확률을 구하라.

제한시간 4시간 30분
문항당 7점