제 12회 한국수학올림피아드 (고등부 오전)

<u>1998년 11월 15일</u>

1. 주어진 자연수 n, k, a에 대하여, 다항식 $f(x) = (1+x)^{n_1} + (1+x)^{n_2} + \cdots + (1+x)^{n_k}$의 x^a의 계수의 최대값을 구하라.
   단, $n_1, n_2, \cdots, n_k$는 $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$을 만족시키는 자연수이다.

2. 모든 자연수 m, n에 대하여 다음의 부등식이 성립함을 보여라.
$$\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{m}} + \left(\frac{1}{m+1}\right)^{\frac{1}{n}} \geq 1$$

3. 볼록사각형 $ABCD$에 정삼각형 ABM, CDP를 사각형의 내부와 겹치지 않도록 바깥쪽으로 그리고, 정삼각형 BCN, DAQ를 사각형의 내부와 겹치도록 안쪽으로 그리자. 네 점 M, N, P, Q 중 어떤 세 점도 동일 직선 위에 있지 않다면 사각형 $MNPQ$가 평행사변형임을 보여라.

4. 좌표평면에서 한 동점이 오른쪽 또는 위로 1씩 갈 수 있다고 할 때, 이 동점이 점 $(0,0)$에서 출발하여 $(1,1), (2,2), \cdots, (n,n)$의 어느 점도 거치지 않고 점 $(n+1, n+1)$에 이르는 최단경로의 개수를 구하라.

제한시간: 2시간 30분
문 항 당: 7점

제 12회 한국수학올림피아드 (고등부 오후)

1998년 11월 15일

5. (i, j) − 성분 a_{ij}가 다음과 같이 정의된 행렬 $A = (a_{ij})$를 생각하자. (단, $1 \le i, j \le 1999$.)

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & (i \ge j) \\ 0 & (i < j). \end{cases}$$

이 때, A의 성분 중에서 1998개의 1을 뽑되 어느 두 개도 같은 행 또는 같은 열에 있지 않도록 뽑는 방법의 수를 구하라.

6. $abc \ge 1$인 임의의 양의 실수 a, b, c에 대하여 다음의 부등식이 성립함을 보여라.

$$\frac{1}{a + b^4 + c^4} + \frac{1}{a^4 + b + c^4} + \frac{1}{a^4 + b^4 + c} \le 1$$

7. 삼각형 ABC의 내심을 I라고 할 때, 부등식

$$IA^2 + IB^2 + IC^2 \ge \frac{AB^2 + BC^2 + CA^2}{3}$$

이 성립함을 보이고, 등호가 성립하는 경우를 찾아라.

8. 방정식 $x^3 + y^3 = 7z^3$의 정수해 (x, y, z)가 무한히 많음을 보여라. 단, x, y, z의 최대공약수는 1이다.

제한시간: 2시간 30분

문 항 당: 7점