

제 12 회 한국수학올림피아드 2차 시험

제 1 일

1999년 4월 17일

1. 두 개의 삼각형 ABC 와 $A'B'C'$ 의 외접원과 내접원의 반지름의 길이를 각각 R, r 과 R', r' 이라고 할 때, 각 C 와 C' 이 같고 $Rr' = R'r$ 이면 두 삼각형이 서로 닮은 꼴임을 보여라.
2. 모든 자연수 m, n 에 대하여 $|f(m+n) - f(m)| \leq n/m$ 을 만족시키는 함수 $f(x)$ 가 있다. 이 때, 모든 자연수 k 에 대하여 부등식

$$\sum_{i=1}^k |f(2^i) - f(2^{i-1})| \leq \frac{k(k-1)}{2}$$

이 성립함을 보여라.

3. 다음의 조건을 만족시키는 자연수 n 을 모두 구하여라.
(조건) $2^n - 1$ 이 3의 배수이고, $(2^n - 1)/3$ 이 적당한 정수 m 에 대하여 $4m^2 + 1$ 의 약수이다.

제한시간 4시간 30분

문항당 7점

제 12 회 한국수학올림피아드 2차 시험

제 2 일

1999년 4월 18일

4. $|x| \neq 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) + f\left(\frac{3+x}{1-x}\right) = x$$

를 만족시키는 함수 $f(x)$ 를 모두 구하여라.

5. 1,2,3,4,5,6의 순열 중에서 서로 다른 두 항씩 자리를 바꾸는 조작을 4회 시행하여 123456을 복원할 수 있으며 3회 이하의 시행으로는 복원이 불가능한 순열 $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$ 을 생각하자. 이러한 순열의 개수를 구하여라.

6. 다음의 두 조건

$$(1) a_1 + a_2 + \cdots + a_{1999} = 2,$$

$$(2) a_1 a_2 + a_2 a_3 + \cdots + a_{1998} a_{1999} + a_{1999} a_1 = 1$$

을 만족시키는 1999개의 음이 아닌 실수 $a_1, a_2, \dots, a_{1999}$ 의 제곱의 총합을 S 라고 할 때, S 의 최대값과 최소값을 구하여라.

제한시간 4시간 30분

문항당 7점