제 13회 한국수학올림피아드 (고등부 오전)

<u>1999년 11월 7일</u>

1. 방정식 $xy=2^x-1$ 의 정수해를 모두 구하라.

2. 방정식 $(a+\sqrt{b})^{1/3}+(a-\sqrt{b})^{1/3}=1$ 을 만족시키는 자연수의 순서쌍 (a,b) 를 모두 구하라.

3. 예각 삼각형 ABC의 꼭지점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D, 직선 AD가 삼각형 ABC의 외접원 O와 만나는 A가 아닌 점을 E, 점 E에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 F라고 할 때, 삼각형 ADF의 외접원의 넓이와 삼각형 CEF의 외접원의 넓이의 합은 원 O의 넓이와 같음을 증명하라. 단, $\angle B \neq \angle C$이다.

4. 한 모서리의 길이가 1인 정육면체를 단위정육면체라고 한다. 자연수 ℓ, m, n에 대하여 ℓmn개의 단위정육면체를 쌓아서 세 모서리의 길이가 각각 ℓ, m, n인 직육면체를 만들었다고 할 때, 이 직육면체의 한 대각선이 내부를 통과하는 단위정육면체의 개수를 구하라.

제한시간: 2시간 30분

문 항 당: 7점

제 13회 한국수학올림피아드 (고등부 오후)

<u>1999년 11월 7일</u>

5. 소수 p가 어떤 정수 a에 대하여 a^2+2의 약수일 때, p 또는 $2p$가 x^2+2y^2 꼴이 됨을 증명하라. 단, x,y는 정수이다.

6. 사면체 $ABCD$의 모서리 AB,CD,AC,BD,AD,BC의 중점을 차례로 K,L,M,N,O,P라고 하자. $AB=CD$, $AC=BD$, $AD=BC$일 때,

$$\left(\frac{AB}{KL}\right)^2+\left(\frac{AC}{MN}\right)^2+\left(\frac{AD}{OP}\right)^2 \geq 6$$

이 성립함을 증명하라.

7. 정삼각형 ABC의 변 AC를 한 변으로 하는 정사각형 $ACDE$가 점 B의 반대쪽에 있다. 점 X가 정사각형 $ACDE$의 내접원 O 위를 움직일 때 삼각형 BCX의 외심 Y의 자취의 양 끝점을 각각 P,Q라고 하자. 이 때, $OP=OQ$임을 증명하라.

8. 자연수 n이 음 아닌 정수 s,t에 대하여 $4^s(8t+7)$ 꼴이 아니면 n은 세 개의 정수의 제곱의 합으로 쓸 수 있다. 이 사실을 이용하여 다음을 증명하라. 홀수인 두 자연수 a,b에 대하여

$$b^2/4 < a < b^2/3$$

이면 $a=x^2+y^2+z^2+w^2$, $b=x+y+z+w$를 동시에 만족시키는 자연수 x,y,z,w가 존재한다.

제한시간: 2시간 30분

문 항 당: 7점