제 13 회 한국수학올림피아드 2차 시험

제 1 일 2000년 4월 15일

1. 임의로 주어진 소수 p에 대하여, 두 조건 $x^2+y^2+z^2-\mathrm{wp}=0$, $0<w<p$를 동시에 만족시키는 정수 x, y, z, w가 존재함을 증명하라.

2. 모든 실수 x, y에 대하여, 조건

$$f(x^2-y^2)=(x-y)\{f(x)+f(y)\}$$

를 만족시키는 함수 $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$를 모두 구하라. 단, $\mathbf{R}$은 실수 전체의 집합이다.

3. 원 O에 내접하는 사각형 $ABCD$에 대하여, $\angle ABD$와 $\angle ADB$의 외각의 이등분선이 만나는 점을 P, $\angle DAB$와 $\angle DBA$의 외각의 이등분선이 만나는 점을 Q, $\angle ACD$와 $\angle ADC$의 외각의 이등분선이 만나는 점을 R, $\angle DAC$와 $\angle DCA$의 외각의 이등분선이 만나는 점을 S라고 할 때, P, Q, R, S는 모두 같은 원 위에 있음을 증명하라.

제한시간 4시간 30분
문항당 7점

제 13 회 한국수학올림피아드 2차 시험

제 2 일 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　2000년 4월 16일

4. 4로 나누면 1이 남는 소수 p에 대하여

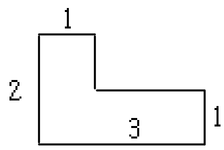
$$\sum_{k=1}^{p-1}\left(\left[\frac{2k^2}{p}\right]-2\left[\frac{k^2}{p}\right]\right)$$

의 값을 구하라. 단, $[x]$는 x보다 크지 않은 가장 큰 정수이다.

5. m, n이 2 이상의 자연수일 때, 다음의 두 명제가 동치임을 증명하라.

(명제 1) mn이 8의 배수이다.

(명제 2) 가로의 길이 m 세로의 길이 n인 직사각형을 다음 그림과 합동인 도형들로 분할할 수 있다.



6. $a \geq b \geq c > 0$, $x \geq y \geq z > 0$인 실수 a, b, c, x, y, z에 대하여 다음을 증명하라.

$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)}+\frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)}+\frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)} \geq \frac{3}{4}.$$

제한시간 4시간 30분

문항당 7점