# 제 14회 한국 수학올림피아드

고등부 - 오전

**2000년 11월 5일**

1. 삼각형 $ABC$ 에 대하여 세 각 $A$, $B$, $C$ 의 이등분선이 마주보는 변과 만나는 점을 각각 $A'$, $B'$, $C'$ 이라 하자. 선분 $AA'$, $BB'$, $CC'$ 의 중점을 각각 $H$, $I$, $J$ 라 할 때, $\dfrac{\triangle HIJ}{\triangle ABC}$ 의 값이 최대가 될 조건을 구하여라.

2. $a$, $b$, $c$ 를 한 삼각형의 세 변의 길이라 할 때, 다음 부등식이 성립함을 보여라.
$$\sqrt{3(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})} \geq \sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\ .$$

3. 자연수 $n$ 에 대해 $P(n)$ 을 $n$ 의 모든 양의 약수들의 곱이라 하자. 두 자연수 $m$, $n$ 에 대해 $P(m) = P(n)$ 이면 $m = n$ 인가?

4. 2 이상의 자연수 $n$ 에 대하여 $A = \{1, \cdots, n\}$ 이라 하자. 이 때, $\log_2 n \leq m \leq 2^n$ 을 만족하는 모든 자연수 $m$ 에 대하여, 다음의 조건을 만족하는 $m$ 개의 서로 다른 $A$ 의 부분집합 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 이 존재함을 보여라.

   (조건) $A$ 의 임의의 두 원소 $i$, $j$ 에 대해 이 중 하나는 포함하고 나머지 하나는 포함하지 않는 집합 $A_k$ 가 존재한다.$(1 \leq k \leq m)$

제한시간 2시간 30분

문항당 7점

# 제 14회 한국 수학올림피아드

고등부 - 오후

**2000년 11월 5일**

5. $2n$ 개의 항을 갖는 수열 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 의 각 항은 1 또는 2 또는 3 이다. $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$ 이 3 의 배수가 되도록하는 수열의 개수를 구하여라.

6. $a, b$ 를 서로 소인 정수라 하자. 임의의 자연수 $c$ 에 대하여 $(a + bx, c) = 1$ 를 만족하는 정수 $x$ 가 존재함을 보여라.

7. $\overline{AB} \neq \overline{AC}$ 인 삼각형 $ABC$ 에 대하여 $G$ 를 무게중심, $I$ 를 내심이라 하자. 두 변 $AB$ 와 $AC$ 의 중점을 각각 $M, N$ 이라 하자. $I$ 에서 $MN$ 에 내린 수선의 발을 $H$ 라 하자. $GI$ 가 $BC$ 와 평행하다면 $H$ 는 $MN$ 의 중점임을 보여라.

8. 3 이상의 자연수 $n$ 에 대하여 다음 성질을 만족하는 $A_n$ 의 최소값을 구하여라 :

   $-\frac{\pi}{2} < \theta_1, \cdots, \theta_n < \frac{\pi}{2}$ 과 $\tan\theta_1 + \tan\theta_2 + \cdots + \tan\theta_n = 0$ 을 만족하는 임의의 $\theta_1, \cdots, \theta_n$ 에 대해 부등식

   $$|\theta_1 + \cdots + \theta_n| < A_n$$

   이 항상 성립한다.

제한시간 2시간 30분

문항당 7점