제 14회 한국수학 올림피아드 - 2차 시험

제 1일 - 2001년 4월 14일

1. **홀수인 소수 p에 대하여, 다음 두 조건을 만족시키는 함수 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$를 모두 구하여라. 단, $\mathbb{Z}$는 정수 전체의 집합이다.**

   (1) $m \equiv n \pmod{p}$ **이면** $f(m) = f(n)$ **이고,**

   (2) **임의의 정수** m, n **에 대하여,** $f(mn) = f(m)f(n)$ **이다.**

2. **볼록사각형 $O_1O_2O_3O_4$의 내부에 고정된 점 P가 있다. 각 $i = 1, 2, 3, 4$에 대하여, 점 P를 지나고 두 반직선 $\overrightarrow{O_iO_{i+1}}$, $\overrightarrow{O_iO_{i-1}}$과 각각 서로 다른 두 점 A_i, B_i에서 만나는 직선 ℓ을 생각하자. 두 선분 PA_i, PB_i의 길이의 곱 $\overline{PA_i} \cdot \overline{PB_i}$가 최소가 되도록 하는 직선 ℓ을 ℓ_i라고 할 때, $\ell_1 = \ell_3$, $\ell_2 = \ell_4$이면 사각형 $O_1O_2O_3O_4$가 평행사변형임을 보여라. 단, $\overrightarrow{XY}$는 점 X에서 시작하여 점 Y로 향하는 반직선이고, $O_0 = O_4, O_5 = O_1$이다.**

3. **등식 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$, $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = 1$을 만족시키는 임의의 실수 $x_1, x_2, \cdots, x_n$과 $y_1, y_2, \cdots, y_n$에 대하여,**

$$(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \leq 2 \left| 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right|$$

   임을 보여라. 또, 등호가 성립할 조건을 구하여라.

제한시간 4시간 30분
문항당 7점