제 15 회 한 국 수 학 올 림 피 아 드

고등부 - 2001년 11월 4일 오전

1. 원소의 개수가 n인 전체 집합 U에 대하여 다음의 조건 $(*)$를 만족시키는 부분 집합 X, Y, Z의 순서쌍 (X, Y, Z)의 개수를 구하여라.

   $(*) \quad X \cup (Y \cap Z^c) = X^c \cup Y^c\,; \quad X, Y, Z \neq \emptyset.$

2. $\angle B$가 둔각인 고정된 $\triangle ABC$에 대하여 반직선 $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$를 각각 ℓ, m이라 하자. 꼭지점 A, B가 각각 반직선 ℓ, m에 있도록 하면서 주어진 $\triangle ABC$를 움직일 때, 꼭지점 C의 자취의 길이를 $\triangle ABC$의 변의 길이와 각의 크기로 나타내어라. 단, $\triangle ABC$를 뒤집는 경우는 생각하지 않는다.

3. 분모가 홀수인 기약분수로 표현되는 모든 유리수들의 집합을 T라 하자. 방정식 $y^2 = x^3 + 2x^2 + 2x + 3$ 이 T에서 해를 갖지 못함을 보여라.

4. 가로, 세로의 길이가 각각 정수로 주어진 직사각형에 대하여, 다음의 규칙 (1), (2)에 따라 새로운 직사각형(들)을 만들어 나간다.

   (1) 기존의 직사각형의 가로와 세로의 길이가 각각 m과 n일 때, 가로와 세로의 길이의 합이 m인 직사각형과, 가로와 세로의 길이의 합이 n인 직사각형을 새로이 만든다. 단, 새로이 만든 직사각형도 가로, 세로의 길이가 각각 정수이어야 하며, 따라서 m(또는 n) $= 1$인 경우에는 가로와 세로의 길이의 합이 m (또는 n)인 직사각형은 새로이 만들지 않는다.

   (2) 새로이 만들어진 직사각형(들) 각각에 대하여 다시 (1)을 시행한다.

   이제 가로와 세로의 길이가 각각 M과 N으로 주어진 직사각형에 대하여 이러한 과정을 계속 반복한다고 하자. 이러한 과정은 결국 유한번 만에 끝나게 되는데, 이때 새로이 만들어진 모든 직사각형의 넓이의 합이 항상 일정함을 보이고, 그 넓이를 구하여라.

제한 시간 2시간 30분

문항당 7점

제 15 회 한 국 수 학 올 림 피 아 드

고등부 - 2001년 11월 4일 오후

5. 양의 실수로 이루어진 임의의 무한수열 $a_1, a_2, a_3, \cdots$에 대하여 부등식

$$n(1+a_n) > (n+1)a_{n-1}, \quad n \geq 2$$

를 만족시키는 연속된 두 항의 쌍 (a_{n-1}, a_n)이 무한히 많음을 보여라.

6. 원주 위에 $3k$개의 점이 놓여 있다. 이들 $3k$개의 점으로 나뉜 $3k$개의 원호 중에 길이가 1인 것, 2인 것, 3인 것이 각각 k개씩이라고 하자. 이때, 이들 $3k$개의 점들 중에는 원의 중심에 대하여 대칭인 두 점이 있음을 보여라.

7. 중심이 서로 다른 두 원 O_1, O_2의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2라 하자. 이때, 다음의 조건 $(*)$를 만족시키는 점 P의 자취를 구하여라.

   $(*)$ 점 P를 중심으로 하는 원 O가 존재하여, 원 O와 원 O_1의 두 교점 사이의 거리가 $2r_1$, 원 O와 원 O_2의 두 교점 사이의 거리가 $2r_2$이다.

8. 자연수 전체의 집합을 $\mathbf{N}$이라 하고, p를 소수라 하자. 상수 함수가 아닌 함수 $f : \mathbf{N} \to \{-1, 0, 1\}$가 다음의 두 조건 (1), (2)를 만족시킨다.

   (1) 모든 $m, n \in \mathbf{N}$에 대하여 $f(mn) = f(m)f(n)$,

   (2) 모든 $n \in \mathbf{N}$에 대하여 $f(n+p) = f(n)$.

   $\omega^p = 1$, $\omega \neq 1$인 복소수 ω에 대하여 $\alpha := \displaystyle\sum_{n=1}^{p-1} f(n)\omega^n$ 이라 정의할 때, α^2 이 취할 수 있는 값을 모두 구하여라.

제한 시간 2시간 30분

문항당 7점