

## 제 15 회 한국수학올림피아드

고등부 - 2001년 11월 4일 오전

1. 원소의 개수가  $n$ 인 전체 집합  $U$ 에 대하여 다음의 조건 (\*)를 만족시키는 부분 집합  $X, Y, Z$ 의 순서쌍  $(X, Y, Z)$ 의 개수를 구하여라.

$$(*) \quad X \cup (Y \cap Z^c) = X^c \cup Y^c; \quad X, Y, Z \neq \emptyset.$$

2.  $\angle B$ 가 둔각인 고정된  $\triangle ABC$ 에 대하여 반직선  $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$ 를 각각  $l, m$ 이라 하자. 꼭지점  $A, B$ 가 각각 반직선  $l, m$ 에 있도록 하면서 주어진  $\triangle ABC$ 를 움직일 때, 꼭지점  $C$ 의 자취의 길이를  $\triangle ABC$ 의 변의 길이와 각의 크기로 나타내어라. 단,  $\triangle ABC$ 를 뒤집는 경우는 생각하지 않는다.

3. 분모가 홀수인 기약분수로 표현되는 모든 유리수들의 집합을  $T$ 라 하자. 방정식  $y^2 = x^3 + 2x^2 + 2x + 3$ 이  $T$ 에서 해를 갖지 못함을 보여라.

4. 가로, 세로의 길이가 각각 정수로 주어진 직사각형에 대하여, 다음의 규칙 (1), (2)에 따라 새로운 직사각형(들)을 만들어 나간다.

(1) 기존의 직사각형의 가로와 세로의 길이가 각각  $m$ 과  $n$ 일 때, 가로와 세로의 길이의 합이  $m$ 인 직사각형과, 가로와 세로의 길이의 합이  $n$ 인 직사각형을 새로이 만든다. 단, 새로이 만든 직사각형도 가로, 세로의 길이가 각각 정수이어야 하며, 따라서  $m$ (또는  $n$ ) = 1인 경우에는 가로와 세로의 길이의 합이  $m$ (또는  $n$ )인 직사각형은 새로이 만들지 않는다.

(2) 새로이 만들어진 직사각형(들) 각각에 대하여 다시 (1)을 시행한다.

이제 가로와 세로의 길이가 각각  $M$ 과  $N$ 으로 주어진 직사각형에 대하여 이러한 과정을 계속 반복한다고 하자. 이러한 과정은 결국 유한 번 만에 끝나게 되는데, 이때 새로이 만들어진 모든 직사각형의 넓이의 합이 항상 일정함을 보이고, 그 넓이를 구하여라.

제한 시간 2시간 30분

문항당 7점

## 제 15 회 한국수학올림피아드

고등부 - 2001년 11월 4일 오후

5. 양의 실수로 이루어진 임의의 무한수열  $a_1, a_2, a_3, \dots$ 에 대하여 부등식

$$n(1 + a_n) > (n + 1)a_{n-1}, \quad n \geq 2$$

를 만족시키는 연속된 두 항의 쌍  $(a_{n-1}, a_n)$ 이 무한히 많음을 보여라.

6. 원주 위에  $3k$ 개의 점이 놓여 있다. 이들  $3k$ 개의 점으로 나뉜  $3k$ 개의 원호 중에 길이가 1인 것, 2인 것, 3인 것이 각각  $k$ 개씩이라고 하자. 이때, 이들  $3k$ 개의 점들 중에는 원의 중심에 대하여 대칭인 두 점이 있음을 보여라.

7. 중심이 서로 다른 두 원  $O_1, O_2$ 의 반지름의 길이를 각각  $r_1, r_2$ 라 하자. 이때, 다음의 조건 (\*)를 만족시키는 점  $P$ 의 자취를 구하여라.

(\*) 점  $P$ 를 중심으로 하는 원  $O$ 가 존재하여, 원  $O$ 와 원  $O_1$ 의 두 교점 사이의 거리가  $2r_1$ , 원  $O$ 와 원  $O_2$ 의 두 교점 사이의 거리가  $2r_2$ 이다.

8. 자연수 전체의 집합을  $\mathbf{N}$ 이라 하고,  $p$ 를 소수라 하자. 상수 함수가 아닌 함수  $f : \mathbf{N} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ 가 다음의 두 조건 (1), (2)를 만족시킨다.

(1) 모든  $m, n \in \mathbf{N}$ 에 대하여  $f(mn) = f(m)f(n)$ ,

(2) 모든  $n \in \mathbf{N}$ 에 대하여  $f(n+p) = f(n)$ .

$\omega^p = 1, \omega \neq 1$ 인 복소수  $\omega$ 에 대하여  $\alpha := \sum_{n=1}^{p-1} f(n)\omega^n$  이라 정의할 때,  $\alpha^2$  이 취할 수 있는 값을 모두 구하여라.

제한 시간 2시간 30분

문항당 7점