제 16 회 한 국 수 학 올 림 피 아 드

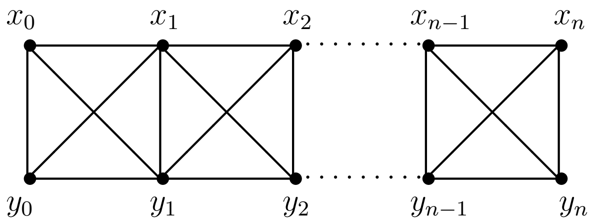
고등부 - 2002년 11월 3일 오전

1. 소수 2003 에 대하여 $n^{2002}+(2003)^{\phi(n)}-1$ 이 $2003\times n$ 의 배수가 되는 양의 정수 n 을 모두 구하여라. 단, $\phi(n)$ 은 n 이하의 양의 정수 중, n 과 서로 소인 것들의 개수이다.

2. 임의의 삼각형의 세 변의 길이 a,b,c 에 대하여 다음의 부등식
$$\frac{1}{a^3+b^3}+\frac{1}{b^3+c^3}+\frac{1}{c^3+a^3}<\frac{2}{abc}$$
이 성립함을 증명하여라.

3. $\angle B=\angle C$ 이고, $\angle A>60^\circ$ 인 이등변 삼각형 ABC 의 외접원을 O 라 하자. 꼭지점 A 에서 원 O 에 접하는 접선을 ℓ 이라 하고, ℓ 위의 점 P 가 $\angle BPA=\angle BAC$ 를 만족시킨다고 하자. 선분 PC 가 원 O 와 만나는 점을 E 라 하고, 직선 BE 가 접선 ℓ 과 만나는 점을 F 라 할 때, $AF=FP$ 임을 보여라. 단, $E\neq C$.

4. 아래의 그림과 같이 n 개의 정사각형이 붙어 있는 도형을 생각하자. $2n+2$ 개의 점 $x_0,x_1,\ldots,x_n,y_0,y_1,\ldots,y_n$ 을 '꼭지점'이라 하고, 각 정사각형의 변 또는 대각선을 '마디'라 하자. 이때, 어느 두 마디도 꼭지점을 공유하지 않도록 $n+1$ 개의 마디를 뽑는 경우의 수를 구하여라.



$*$ 제한 시간 2시간 30분; 문항당 7점 $*$

제 16 회 한 국 수 학 올 림 피 아 드

고등부 - 2002년 11월 3일 오후

5. 원주 위에 n 개의 점이 주어져 있고, 이 점들을 잇는 $\frac{n(n-1)}{2}$ 개의 현이 그어져 있다. 어느 세 현도 원의 내부의 한 점에서 만나지 않을 때, 이 현들에 의하여 나누어진 원의 내부의 영역의 개수를 구하여라.

6. 방정식 $x^3 + 2y^3 + 4z^3 + 2003xyz = 0$ 의 정수해를 모두 구하여라.

7. 적당한 양의 정수 a 에 대하여 다음의 두 조건을 모두 만족시키는 음이 아닌 정수들의 순서쌍 $(x_1, x_2, \ldots, x_{2002})$ 를 모두 구하여라.

   (1) $0 < x_1 + x_2 + \cdots + x_{2002} \le a$
   (2) $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{2002}^2 + 4^2 = a^2$

8. 삼각형 ABC 에서 꼭지점 A, B, C 를 마주보는 변의 길이를 각각 a, b, c 라 하자. 삼각형 ABC 의 내심을 I, 내접원이 변 BC 와 접하는 점을 P, 두 직선 IC 와 AP 의 교점을 X 라 할 때, $\frac{IX}{IC}$ 를 a, b, c 에 대한 식으로 나타내어라. 단, $\angle C > \angle B$ 이다.

$*$ 제한 시간 2시간 30분; 문항당 7점 $*$