

## 제 16 회 한국수학올림피아드 - 2 차 시험

2003년 4월 12일 (제 1 일)

- 어떤 전산실의 컴퓨터들이 다음과 같이 네트워크를 이루고 있다. 각각의 컴퓨터는 세 개의 케이블을 통하여 세 대의 다른 컴퓨터와 직접 연결되어 있고, 임의의 두 컴퓨터는 직접 또는 (다른 컴퓨터들을 거쳐) 간접적으로 연결되어 서로 데이터를 주고 받을 수 있다. 이제 이 컴퓨터들 중  $K$  대를 제거하여 서로 데이터를 주고 받을 수 없는 두 대의 컴퓨터가 존재하거나 한 대의 컴퓨터만 남도록 하는  $K$ 의 최소값을  $k$ 라 하고, 한편 케이블 중  $L$  개를 제거하여 서로 데이터를 주고 받을 수 없는 두 대의 컴퓨터가 존재하도록 하는  $L$ 의 최소값을  $l$ 이라고 하자. 이때,  $k = l$ 임을 보여라.
- $\angle A < 90^\circ$  인 마름모  $ABCD$ 의 두 대각선  $AC, BD$ 의 교점을  $M$ 이라고 하고, 선분  $MC$  위의 점  $O$ 를  $OB < OC$ 가 되도록 잡아  $\frac{MA}{MO} = t$ 라 하자. 단  $O \neq M$ 이다. 점  $O$ 를 중심으로 하고 두 점  $B, D$ 를 지나는 원이 직선  $AB$ 와 만나는 점을  $B, X$  (직선  $AB$ 가 이 원과 접할 경우에는  $X = B$ 임), 직선  $BC$ 와 만나는 점을  $B, Y$ 라 하자. 두 직선  $DX, DY$ 가 선분  $AC$ 와 만나는 점을 각각  $P, Q$ 라 할 때,  $\frac{OQ}{OP}$ 를  $t$ 의 식으로 나타내어라.
- 방정식  $2x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = z^2$ 은  $x \neq 0$ 인 정수해를 갖지 않음을 보여라.

제한 시간 4시간 30분

문항당 7점