

제 16 회 한국수학을올림피아드 - 2 차 시험

2003년 4월 13일 (제 2 일)

4. 삼각형 ABC 의 내접원이 변 AB, BC, CA 와 접하는 점을 각각 P, Q, R 이라 할 때, 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\frac{BC}{PQ} + \frac{CA}{QR} + \frac{AB}{RP} \geq 6.$$

5. 양의 정수 m 에 대하여 다음에 답하여라.

- (a) $2^{m+1} + 1$ 이 $3^{2^m} + 1$ 의 약수이면, $2^{m+1} + 1$ 은 소수임을 보여라.
(b) (a)의 역은 성립하는가?

6. 원주 위에 서로 다른 n 개의 점이 놓여 있다. 이 점들 중 임의의 한 점에서 시작하여 그 점과 그 점으로부터 시계반대방향으로 m 번째 점을 선분으로 연결하고, 이 m 번째 점과 이 점으로부터 시계반대방향으로 m 번째 점을 선분으로 연결하고, ... 이러한 과정을 새로운 선분이 생기지 않을 때까지 되풀이하자. 이렇게 그려진 선분들의 교점 중, 원의 내부에 있는 것들의 개수를 I 라 할 때, 다음에 답하여라. 단, m, n 은 서로 소인 양의 정수로서 $6 \leq 2m < n$ 을 만족한다.

- (a) 원주 위에 놓인 서로 다른 n 개의 점의 위치가 변할 때, I 가 취할 수 있는 최대값을 m, n 의 식으로 나타내어라.
(b) 부등식 $I \geq n$ 이 항상 성립함을 보이고, $m = 3$ 이고 n 이 위의 조건을 만족시키는 임의의 짝수일 때 $I = n$ 인 경우가 존재함을 보여라.

제한 시간 4시간 30분

문항당 7점