

제 12회 한국수학올림피아드 (중등부 오전)

1998년 11월 15일

1. 등식 $x^3 + 2y^3 + 4z^3 = 9$ 를 만족시키는 정수 x, y, z 가 존재하지 않음을 보여라.
2. 여섯 대의 컴퓨터와 세 대의 프린터 사이를 다음의 (조건)이 만족되도록 선으로 연결하려고 할 때, 필요한 선의 수 k 의 최소값을 구하라.
(조건) 여섯 대의 컴퓨터 중에서 어느 세 대를 택해도 동시에 프린터를 사용할 수 있다.
단, 선은 컴퓨터와 프린터 사이만 연결할 수 있다고 한다.
3. 삼각형 ABC 의 외심을 O , 수심을 H , 변 AC 의 중점을 D 라고 하자. 직선 BO 가 삼각형 ABC 의 외접원과 만나는 또 다른 점을 E 라고 할 때, 세 점 H, D, E 가 동일직선 위에 있음을 보여라.
4. 평면 상에 어떤 두 직선도 서로 평행하지 않고 어떤 세 직선도 한점에서 만나지 않는 n 개의 직선이 평면을 여러 개의 영역으로 분할하고 있다고 할 때, 이 영역들 중에서 넓이가 유한한 영역의 개수를 구하라. 단, $n \geq 3$ 이다.

제한시간: 2시간 30분

문항당: 7점

제 12회 한국수학올림피아드 (중등부 오후)

1998년 11월 15일

5. 반지름의 길이가 1 인 원에 내접하는 정 $2n$ 각형의 모든 변과 대각선의 길이의 제곱의 합을 구하라. 단, $n \geq 2$ 이다.
6. $a \geq b \geq c > 0$ 인 실수 a, b, c 에 대하여 다음의 부등식을 증명하여라.

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a+b}{c+a} + \frac{b+c}{a+b} + \frac{c+a}{b+c}$$

7. 예각삼각형 ABC 의 외심을 O 라고 하자. 각 A 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D , 점 D 에서 변 BC 에 수직인 직선이 직선 AO 와 만나는 점을 E 라고 할 때, 삼각형 ADE 가 이등변삼각형임을 보여라. 단, 각 B 와 각 C 는 서로 다르다.
8. 집합 T 를 $2^k 3^l$ (k, l 은 음이 아닌 정수) 꼴의 자연수 전체의 집합이라고 하자. 이 때, 그 합이 다시 집합 T 의 원소가 되는 1998 개의 서로 다른 T 의 원소가 존재함을 보여라.

제한시간: 2시간 30분

문항당: 7점