# 제 13회 한국수학올림피아드 (중등부 오전)

**1999년 11월 7일**

1. 볼록 사각형 $ABCD$의 내부에 $OA=OB$, $OC=OD$, 그리고 $\angle AOB=90^\circ=\angle COD$를 만족시키는 점 $O$가 있다고 하자. 선분 $AC$를 한 변으로 하고 점 $B$의 반대쪽에 있는 정사각형과 선분 $BD$를 한 변으로 하고 점 $C$의 반대쪽에 있는 정사각형의 공통부분이 정사각형일 때, 사각형 $ABCD$가 원에 내접함을 증명하라.

2. 세 개의 정수에 대하여, 이 수들의 합, 제곱의 합, 세제곱의 합을 각각 $A,B,C$라고 하자. $9A\ge B+60$, $C\ge 360$일 때, $A,B,C$의 값을 구하라.

3. $1\le a<b\le 100$이고

$$\left\lfloor a+\frac{b}{a}\right\rfloor=\left\lfloor b+\frac{a}{b}\right\rfloor$$

인 자연수의 순서쌍 $(a,b)$의 개수를 구하라. 단, $\lfloor x\rfloor$는 $x$보다 크지 않은 최대의 정수를 나타낸다.

4. 평면에서 반지름의 길이가 1인 원 $C$와 한 변의 길이가 $a$인 정사각형 $R$이 있다. 원 $C$는 고정되어 있고 정사각형 $R$이 평행이동하면서 그 중심이 원 $C$의 내부와 원주상을 움직일 때, 정사각형 $R$이 움직여서 생기는 영역의 넓이를 구하라.

제한시간: 2시간 30분

문 항 당: 7점

# 제 13회 한국수학올림피아드 (중등부 오후)

**1999년 11월 7일**

5. 예각 삼각형 $ABC$의 외심을 $O$, 직선 $CO$와 변 $AB$가 만나는 점을 $P$, 직선 $BO$와 변 $AC$가 만나는 점을 $Q$라고 하자. 이 때, $BP=PQ=QC$일 필요충분조건은 $\angle A=60°$임을 증명하라.

6. 자연수 $m$에 대하여, $m$을 나누는 가장 작은 소수를 $p(m)$이라고 하자. $p(m)^4>m$를 만족시키는 자연수 $m$이 가질 수 있는 약수의 최대 개수를 구하라.

7. $\angle BA_0C=14°$인 두 반직선 $A_0B$, $A_0C$ 위에 다음과 같이 점 $A_1, A_2, \cdots$를 찍는다 : (ⅰ) 먼저 점 $A_1$을 반직선 $A_0B$ 위에 임의로 찍는다. 단, $A_0\neq A_1$; (ⅱ) $n\geq 2$에 대하여 점 $A_{n-1}$이 반직선 $A_0B$ 위에 있으면 점 $A_n$을 반직선 $A_0C$ 위에, 그리고 점 $A_{n-1}$이 반직선 $A_0C$ 위에 있으면 점 $A_n$을 반직선 $A_0B$ 위에 $A_{n-2}A_{n-1}=A_{n-1}A_n$ 되도록 찍는다. $A_0, A_1, \cdots, A_n$이 모두 서로 다르다고 할 때, 점 $A_n$을 찍을 수 있는 $n$의 최대값을 구하라.

8. 집합 $S=\{1,2,\cdots,n\}$ 에 대하여

   조건: 모든 $i, j=1,2,\cdots,m$ 에 대하여 $A_i\cup A_j\neq S$

   를 만족시키는 $S$의 서로 다른 부분집합 $A_1, A_2, \cdots A_m$이 존재할 자연수 $m$의 최대값을 구하라.

제한시간: 2시간 30분

문 항 당: 7점