

제 14회 한국 수학올림피아드

중등부 - 오전

2000년 11월 5일

1. 임의의 자연수 a 에 대해, $a^3 + 1$ 과 $a^7 + 1$ 의 최대공약수는 $a + 1$ 임을 증명하여라.
2. 일요일부터 토요일까지의 연속된 7일 중에서 같은 달에 속해 있는 날들을 한 주간 이라고 부르자. 예를 들어 어느 달의 말일이 일요일이면 그 달의 마지막 주간은 그 말일 하루로 이루어진다. 1월1일부터 같은 해의 12월31일까지를 한 해라고 할 때, 한 해에 들어있는 주간의 최대값과 최소값을 구하여라.
3. 예각 삼각형 ABC 가 원 O 에 내접한다. 점 A 에서 BC 에 내린 수선의 발을 P 라 하고, AP 의 연장선이 원 O 와 만나는 점을 D 라 하자. AB 와 AC 의 중점을 각각 M, N 이라 하고, MP 의 연장선이 CD 와 만나는 점을 Q , NP 의 연장선이 BD 와 만나는 점을 R 이라 하자. 이 때, 세 직선 AD, BQ, CR 이 한 점에서 만날 필요충분조건은 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 임을 보여라.
4. $1 \leq a, b \leq 2$ 를 만족하는 실수 a, b 에 대해 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$2(a + b)^2 \leq 9ab .$$

제한시간 2시간 30분

문항당 7점

제 14회 한국 수학올림피아드

중등부 - 오후

2000년 11월 5일

5. 2000자리수 a 는 최고자리의 수가 2이고 $a = 2(\)99\cdots 99(\)(\)$ 와 같이 가운데 1996개 자리의 수는 9이고, 또한 a 는 10의 배수가 아니다. 처음 두 자리와 마지막 두 자리의 숫자를 두 자리 수로 보아 그 두 수의 합이 99이다. a 를 나타내는 숫자를 거꾸로 배열한 수를 b 라 할 때 곱 ab 가 완전제곱수가 되는 자연수 a 를 모두 구하여라.

6. x, y, z 를 $xyz \geq x + y + z$ 를 만족하는 양의 실수라 하자. 이 때 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\sqrt{2x^2 + yz} + \sqrt{2y^2 + zx} + \sqrt{2z^2 + xy} \geq 9 .$$

7. 삼각형 ABC 가 $2\angle B < \angle A < 90^\circ$ 를 만족한다. 변 AB 상에 $\angle A = 2\angle APC$ 가 되도록 점 P 를 잡는다. $\overline{BC} = a, \overline{AC} = b, \overline{BP} = 1$ 이라 할 때, \overline{AP} 를 a 와 b 로 나타내어라.

8. n 명의 남자와 한 명의 여자가 회의실에 앉아 있다. 다음 두 수가 같음을 보여라.

(1) 남자 중 한 명을 선택하여 내 보내고 나머지 $n - 1$ 명의 남자를 각각 다른 사람의 자리에 앉도록 배열하는 방법의 수. (이 때, 여자는 움직이지 않는다.)

(2) 전체 $n + 1$ 명을 모두 다른 사람의 자리에 앉도록 배열하는 방법의 수.

제한시간 2시간 30분

문항당 7점