

제 15 회 한국수학올림피아드

중등부 - 2001년 11월 4일 오전

1. 세 변의 길이가 양의 정수이고 가장 짧은 변의 길이가 141인 직각삼각형 중에서 넓이가 가장 작은 것의 다른 두 변의 길이를 구하여라.
2. n 을 어떤 쌍둥이 소수의 곱이라고 하자. n 의 (양의) 약수의 합을 $s(n)$ 이라 하고, n 보다 작은 자연수 중에서 n 과 서로 소인 것들의 개수를 $p(n)$ 이라 할 때, $s(n)p(n)$ 을 n 의 식으로 나타내어라. 단, 쌍둥이 소수는 차이가 2인 두 소수를 뜻한다.
3. 원 O 위의 두 점 A, B 를 $\angle AOB < 120^\circ$ 되도록 잡고, 점 A 에서의 원 O 의 접선 위에 점 C 를 $AB = AC$, $\angle BAC < 90^\circ$ 되도록 잡자. 직선 BC 와 원 O 의 교점 중에서 B 가 아닌 것을 D , 삼각형 ABD 의 내심을 I 라 하자. 직선 CI 와 AD 의 교점을 E 라 할 때, $AE = AC$ 임을 보여라.
4. $n(\geq 3)$ 개의 도시가 철도로 연결되어 어떤 도시에서도 다른 모든 도시로 기차를 타고 갈 수 있다고 하자. 이들 n 개의 도시의 집합을 A 라고 할 때, 다음의 조건 (1), (2)를 만족시키는 집합 $C(C \subset A)$ 가 존재함을 보여라.
 - (1) 집합 C 는 적어도 $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$ 개의 도시를 포함하고 있다.
 - (2) 집합 C 에 속한 어떤 두 도시도 직접 연결되어 있지 않다.단, 세 도시 이상을 포함하는 순환선은 없다고 가정하고, 실수 r 에 대하여 $\lfloor r \rfloor$ 은 r 보다 크지 않은 가장 큰 정수를 뜻한다.

제한 시간 2시간 30분

문항당 7점

제 15 회 한국수학올림피아드

중등부 - 2001년 11월 4일 오후

5. 집합 A 를 다음의 조건 (1), (2), (3)을 만족시키는 실수의 부분집합이라고 할 때, $\sqrt{2002} + 2001 \in A$ 임을 보여라.

(1) $1 \in A$,

(2) $x \in A \implies x^2 \in A$,

(3) $(x - 3)^2 \in A \implies x \in A$.

6. $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, $0 \leq w \leq 1$ 인 실수 x, y, z, w 에 대하여

$$x(1 - y) + 2y(1 - z) + 3z(1 - w) + 4w(1 - x)$$

의 최대값을 구하여라.

7. 집합 $\{a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n\} = \{1, 2, \dots, 2n\}$ 에 대하여

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n \text{ 이고, } b_1 > b_2 > \dots > b_n \text{ 이면}$$

$$\sum_{i=1}^n |a_i - b_i| = n^2 \text{ 임을 보여라.}$$

8. $\angle ABC$ 와 $\angle BCD$ 가 예각인 볼록사각형 $ABCD$ 의 내부에 $AE = DE$ 를 만족시키는 점 E 를 잡고, 직선 CE, BE 가 직선 AD 와 각각 X, Y 에서 만난다고 하자. (단, $X \neq A, Y \neq D$.) 이제 네 점 A, B, E, X 가 한 원 위에 있고, 네 점 C, D, E, Y 도 한 원 위에 있다고 할 때, 점 E 에서 직선 AB, BC, CD 에 이르는 거리가 모두 같음을 보여라.

제한 시간 2시간 30분

문항당 7점