제 10 회 한국수학올림피아드
문 제

(오전) 1996년 11월 10일

1. 단위원의 내부 또는 둘레 위에서 임의로 4개의 점을 잡으면 항상 거리가 $\sqrt{2}$ 이하인 두점이 있음을 보여라.

2. 자연수 전체의 집합을 N 이라 할 때, 함수 $f : N \to N$가 두 조건

   i) 모든 $n \in N$ 에 대해서 $f(n + f(n)) = f(n)$

   ii) 어떤 주어진 자연수 n_0에 대해서 $f(n_0) = 1$

   을 만족시키면 f 는 항등적으로 $f(n) = 1$ $(n \in N)$ 임을 보여라.

3. 주어진 자연수 n 에 대해서 $a = \left[\sqrt{n}\right]$라 할 때

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\sqrt{k}\right]$$

   을 n 과 a의 식으로 나타내어라.

   단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수이다.

4. 주어진 $\angle XOY$의 내부에 각의 두 변에 접하는 원 C가 주어져 있다. 이 원의 중심 C를 지나고 각의 두 변에 접하는 원을 C_1 이라 하고, 원 C_1의 C를 지나는 지름의 다른 한 끝 점을 A, 이 지름과 원 C와의 교점을 B라한다. 이 때, A를 중심, 선분 AB를 반지름으로 하는 원은 $\angle XOY$의 변에 접함을 증명하여라.

시간 : 150분

배점 : 각 문항 10점

제 10 회 한국수학올림피아드

문　　제

(오후) 1996년 11월 10일

5. 방정식 $x^2+y^2+z^2-2xyz=0$을 만족시키는 정수 x,y,z를 모두 구하여라.

6. 다음 조건을 만족시키는 두 개의 수열(중복가능) $\{a_i\},\{b_i\}$ $(i=1,2,\cdots,k)$가 존재할 k의 최소값을 구하여라.

   i) 모든 $i=1,2,\cdots,k$ 에 대하여 a_i,b_i는 집합 $S=\{1996^n \mid n=0,1,2,\cdots\}$의 원소이다.

   ii) 모든 $i=1,2,\cdots,k$에 대하여, $a_i \neq b_i$

   iii) 모든 $i=1,2,\cdots,k-1$에 대하여, $a_i \leq a_{i+1},\ b_i \leq b_{i+1}$

   iv) $\sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i=1}^{k} b_i$

7. 자연수 n에 대하여

$$1+\frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}+\frac{\alpha_2}{(\sqrt{2})^2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{(\sqrt{2})^n}$$

   인 꼴로 표시되는 실수 전체의 집합을 A_n 이라 하자. 단, $j=1,2,\cdots,n$ 에 대하여 $\alpha_j=1$ 또는 $\alpha_j=-1$ 이다.

   집합 A_n의 원소의 개수 N을 구하고, 또 A_n의 서로 다른 두 원소의 곱의 총합을 구하여라.

8. $AB \neq AC$ 인 예각삼각형 ABC에서, 각 A의 이등분선과 변 BC와의 교점을 V, A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D라 한다. 세 점 A,V,D를 지나는 원이 변 AB,CA와 만나는 점을 각각 E,F 라 하면 세 직선 AD,BE,CF는 한 점에서 만남을 증명하여라.

시간 : 150분

배점 : 각 문항 10점