

1997년도  
한국수학올림피아드 2차 시험

제 1 일

1997. 4. 19

1. 컴퓨터에서 쓰이는 용어 중에서 8 비트를 word 라 한다. 다시 말해서, word  $w = (w_1, w_2, \dots, w_8)$  이고  $w_k$  ( $k = 1, \dots, 8$ ) 는 0 또는 1 이다. 값이 다른 자리수의 개수가 3 인 두 word  $x, y$  가 있다고 하자. 이 때  $x, y$  각각과 값이 다른 자리수의 개수가 5 이하인 word 가 188 개 뿐임을 보여라.

2.  $\triangle A_1A_2A_3$  에 원  $O$  가 내접하고 있다. 각  $j = 1, 2, 3$  에 대하여 선분  $OA_j$  와 원  $O$  의 교점을  $B_j$  라 하고, 점  $B_j$  를 중심으로 하고  $\angle A_j$  의 두 변에 접하는 원이 원  $O$  의 내부에서 선분  $OA_j$  와 점  $C_j$  에서 만난다고 하자. 이 때

$$\frac{\overline{OC_1} + \overline{OC_2} + \overline{OC_3}}{\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_1}} \leq \frac{1}{4\sqrt{3}}$$

임을 보이고 등호가 성립하는 조건을 구하여라.

3. 양의 실수 위에서 정의된 두 함수  $f, g$  가 다음 두 조건을 만족한다.

(i)  $x < y$  이면  $f(x) < f(y)$ .

(ii) 모든  $x, y$  에 대하여  $f(xy) = g(y)f(x) + f(y)$ .

이러한 조건을 만족하는 함수  $f, g$  의 쌍을 모두 구하여라.

제한시간 : 270분

계산기 사용 불가

배점 : 각 문항 7점

1997년도  
한국수학올림피아드 2차 시험

제 2 일

1997. 4. 20

4. 숫자 1, 2, 3 을 가지고 중복하여  $n$  자리의 자연수를 만드는데 3 만이 유일하게 서로 이웃하게 할 수 있다. 이런 방법으로 만들어진 자연수의 개수를 구하라.

5. 양의 실수  $a_1, a_2, \dots, a_n$  에 대하여

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}, \quad G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n},$$

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$$

이라고 할 때 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\begin{cases} \frac{A}{H} \leq -1 + 2 \left( \frac{A}{G} \right)^n, & n \text{ 이 짝수} \\ \frac{A}{H} \leq -\frac{n-2}{n} + \frac{2(n-1)}{n} \left( \frac{A}{G} \right)^n, & n \text{ 홀수} \end{cases}$$

6.  $p_1, \dots, p_r$  이 서로 다른 소수이고  $n_1, \dots, n_r$  이 임의의 자연수일 때,  $x, y$  가 서로 소이고  $x^3 + y^3 = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r}$  을 만족시키는 정수해의 순서쌍  $(x, y)$  의 개수는  $2^{r+1}$  개 이하임을 증명하여라.

제한시간 : 270분

계산기 사용 불가

배점 : 각 문항 7점