제 29회 국제수학올림피아드
1988년 7월 15일 - 16일, 호주

제 1일 문제

1. 반지름이 각각 R과 $r(R > r)$이고 중심이 같은, 동일 평면상에 있는 두 원을 생각하자. P는 작은 원 위에 있는 고정된 점이고 B는 큰 원 위에서 움직이는 점이다. 직선 BP는 큰 원 위의 한 점 C에서 큰 원과 다시 만난다. P를 지나고 BP에 수직인 직선 l은 작은 원 위의 한 점 A에서 작은 원과 다시 만난다.(직선 l이 P에서 작은 원의 접선인 경우는 $A = P$이다.)

   (I) $BC^2 + CA^2 + AB^2$의 값들의 집합을 구하여라.

   (II) 선분 AB의 중점의 자취를 구하여라.

   $\boxed{\text{착안점}}$ (평면기하) $\angle OPA = \theta$ 라고 놓고 피타고라스 정리를 사용.

2. n은 양의 정수이고 $A_1, A_2, \cdots, A_{2n+1}$은 집합 B의 부분집합들이다. 다음 세 조건을 가정하자.

   (a) 각각의 A_i는 $2n$개의 원소를 갖는다.

   (b) 각각의 $A_i \cap A_j (1 \le i < j \le 2n+1)$는 꼭 한 개의 원소만을 갖는다.

   (c) B의 각 원소는 적어도 두 개의 A_i에 속한다.

   B의 각 원소에 0이나 1을 대응시켜서 각각의 A_i가 0에 대응되는 원소를 꼭 n개만 갖도록 하려고 한다. 이 조건을 만족하는 n의 값들을 결정하여라.

   $\boxed{\text{착안점}}$ 세 조건 $(a), (b), (c)$ 로부터 "B의 각 원소는 꼭 두 개의 A_i에 속한다."는 사실을 얻는다.

3. 양의 정수들의 집합위에서 정의되는 함수 f가 다음과 같이 주어진다.

   모든 양의 정수 n에 대해서,

$$\begin{aligned} f(1) &= 1, \quad f(3) = 3, \\ f(2n) &= f(n), \\ f(4n+1) &= 2f(2n+1) - f(n) \\ f(4n+3) &= 3f(2n+1) - 2f(n) \end{aligned}$$

$f(n)=n$을 만족하고 1988보다 작거나 같은 양의 정수 n의 개수를 구하여라.

$\boxed{\text{착안점}}$ "$f(n)=n$의 이진수 표현을 역으로 배열하여 얻은 수"

제 2일 문제

4. 부등식 $\displaystyle\sum_{k=1}^{70}\frac{k}{x-k}\geqq\frac{5}{4}$을 만족하는 실수 x들의 집합은 서로 소인 구간들의 합집합이고, 그 구간들의 길이의 합은 1988임을 증명하여라.

$\boxed{\text{착안점}}$ $S=\displaystyle\bigcup_{k=1}^{70}(i,x_i\,],\quad i<x_i<i+1<x_{i+1},\cdots$ 다항식의 근과 계수의 관계 이용

5. 직각 삼각형 ABC에서 $\angle A$는 직각이고 AD는 A에서 빗변 BC에 내린 높이이다. 삼각형 ABD와 ACD의 내심을 잇는 직선이 변 AB와 AC 에서 만나는 점을 각각 K,L이라고 하자. S와 T를 각각 삼각형 ABC 와 AKL의 면적이라 할때, $S\geqq 2T$임을 증명하여라.

$\boxed{\text{착안점}}$ 닮은꼴을 이용하여 $\triangle AKL$이 이등변삼각형임을 보이고 닮은 비로 T의 면적을 구하자.

6. a와 b는 양의 정수이고 a^2+b^2은 $ab+1$로 나눠 떨어진다. $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$은 완전제곱임을 보여라.

참고 어떤 정수의 제곱으로 표시되는 수를 완전제곱이라 한디.

$\boxed{\text{착안점}}$ $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$이 정수가 되는 양의 정수쌍 $(a,b),\ 0<a\leqq b$에 대해서 $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}=\dfrac{r^2+a^2}{ra+1}$이 되는 정수 $r,\quad 0\leqq r<a$이 존재함을 보임.