제 30회 국제수학올림피아드

1989년 7월 18일 - 19일, 서독

제 1일 문제

1. 집합 $\{1, 2, \cdots, 1989\}$는 다음 두 조건을 만족시키는 서로 소인 부분집합 $A_i (i = 1, 2, \cdots, 117)$의 합으로 나타낼 수 있음을 증명하여라.

   (i) 모든 i에 대하여, 집합 A_i는 17개의 원소를 가지고,

   (ii) 집합 A_i의 모든 원소의 합은 모두 같다.

   착안점

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1, & 2, & \cdots, & \mathrm{n} \\ & \mathrm{n}, & n-1, & \cdots, & 1 \\ \hline & n+1, & n+1 & \cdots & n+1 \end{array}$$

   임을 이용하라.

2. 예각삼각형 ABC에서, 각 A의 내각의 이등분선이 삼각형 ABC의 외접원과 다시 만나는 점을 A_1이라 하고, 점 B_1 과 C_1을 같은 방법으로 정의한다. 또, 직선 AA_1이 두 점 B와 C에서의 외각의 이등분선과 만나는 점을 A_0라 하고, 점 B_0과 C_0을 같은 방법으로 정의한다. 다음을 증명하여라. (i) 삼각형 $A_0B_0C_0$의 넓이 $= 2\times$ (육각형의 $AC_1BA_1CB_1$ 넓이)

   (ii) 삼각형 $A_0B_0C_0$의 넓이 $\geqq 4\times$ (삼각형 ABC의 넓이)

   착안점 (i) 우선 $\Box IAC_0B$의 넓이 $= 2 \times (\Box IBA_1C$의 넓이)를 보이면 된다.

   (ii) H를 수심이라 할때 $\Box BA_1CH \geq 2\triangle BCH$임을 보이면 된다.

3. n과 k는 양의 정수이고, S는 다음 조건을 만족시키는 평면 위의 n개의 점으로 된 집합이라 한다.

   (i) S의 어떤 세 점도 같은 직선 위에 있지 않고,

(ii) S의 모든 점 P에 대하여, P에서 같은 거리에 있는 S의 점이 적어도 k개 존재한다.

다음을 증명하여라.

$$k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$$

$\boxed{\text{착안점}}$ 한 점 P에서 같은 거리에 있는 점들을 이은 선분의 갯수를 적어도 $\binom{k}{2}$이고 가정에 의해 $\frac{n}{2}\binom{k}{2} > \binom{n}{2}$ 임을 보인다.

제 2일 문제

4. 볼록사각형 $ABCD$에서, 변 AB, AD, BC에 대하여 $AB = AD + BC$인 관계가 있다. 변 CD로부터의 거리가 h이고,

$$AP = h + AD, \qquad BP = h + BC$$

를 만족시키는 점 P가 사각형의 내부에 존재한다고 한다. 다음을 증명하여라.

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geqq \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}$$

$\boxed{\text{착안점}}$ "변 CD로부터의 거리가 h이고 $AP = h + AD, \quad BP = h + BD$를 만족시키는 점 P는 CD에 접하고 두 원에 외접하는 원의 중심이다."

5. 모든 양의 정수 n 에 대하여, 모두가 소수의 정수제곱이 아닌 연속한 n개의 양의 정수가 존재함을 밝혀라.

$\boxed{\text{착안점}}$ $\{(n+1)!\}^2 + k, \qquad 2 \leqq k \leqq n+1$은 합성수임을 이용한다.

6. n 이 양의 정수일 때, 집합 $\{1, 2, \cdots, 2n\}$의 순열 $(x_1, x_2, \cdots, x_{2n})$은 $\{1, 2, \cdots, 2n-1\}$중의 적어도 하나의 i 에 대하여 $|x_i - x_{i+1}| = n$을 만족시킬 때, 성질 P를 갖는다고 한다.

   모든 양의 정수 n에 대하여, 성질 P를 가지는 순열의 개수는 성질 P를 갖지않는 순열의 개수보다 더 많음을 밝혀라.

$\boxed{\text{착안점}}$ 포함과 배제의 원리를 이용한다.