제 31회 국제수학올림피아드
1990년 7월 12일 - 13일, 중국

제 1일 문제

1. 한 원의 두 현 AB, CD가 원의 내부의 점 E에서 만나고 있다. M을 선분 EB 위의 양끝점이 아닌 점이라 하자. 세점 D, E, M을 지나는 원에 E에서 그은 접선이 직선 BC, AC와 만나는 점을 각각 F, G라 한다.
   $\dfrac{AM}{AB} = t$ 라 할 때 $\dfrac{EG}{EF}$를 t의 식으로 나타내어라.

   $\boxed{\text{착안점}}$ 닮은꼴을 이용한다.

2. n은 $n \geq 3$인 정수이다. 한 원둘레 위의 서로 다른 $2n-1$개의 점으로 이루어진 집합을 E라 하자. E의 점 중에서 꼭 k개의 점에 검은 칠을 할 때, 검은 칠을 한 것중 적어도 한 쌍의 점이 있어서, 이 두 점을 제외한 두 개의 호 중에서 어느 하나의 호 위에 E의 점이 꼭 n개 있으면 "k개가 칠이 잘 되었다"라고 한다. 모든 k개가 색칠이 잘된 것이 되기 위한 k의 최소값을 구하여라.

   $\boxed{\text{착안점}}$ "두 점 i, j에서 이 두 점을 제외한 두 개의 호 중에서 어느 하나의 호 위에 E의 점이 꼭 n개 있다. $\iff |i-j| = n+1$ 또는 $|i-j| = n-2$"임을 이용한다.

3. $\dfrac{2^{n+1}}{n^2}$이 정수가 되는 1보다 큰 모든 정수 n을 구하여라.

   $\boxed{\text{착안점}}$ 우선 조건을 이용하여 $n = 3^k \cdot d,\ (d, 3) = 1$임을 보이고 후에 $n = 3$이어야 함을 보인다.

제 2일 문제

4. Q^+를 양의 유리수 전체의 집합이라 하자. 모든 양의 유리수 x, y에 대하여 $f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}$를 만족시키는 함수 $f : Q^+ \to Q^+$를 만들어라.

   $\boxed{\text{착안점}}$ 우선 $f(xy) = f(x)f(y), \qquad f(f(x)) = \frac{1}{x}, \quad x, y \in Q^+$임을 보이자.

5. 처음에 1보다 큰 정수 n_0이 주어져 있고, 두 경기자 A, B가 다음 규칙에 따라서 정수 $n_1, n_2, n_3, \cdots$을 번갈아 뽑고 있다. n_{2k}를 알았을 때, A는 $n_{2k} \leq n_{2k+1} \leq n_{2k}^2$인 정수 n_{2k+1}을 뽑고, n_{2k+1}을 알았을 때, B는 $\frac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}}$이 솟수의 자연수 거듭제곱이 되는 정수 n_{2k+2}를 뽑는다. A는 1990을 뽑으면 이기고, B는 1을 뽑으면 이긴다고 한다. 다음 각각을 만족시키는 n_0을 모두 구하고 그 이유를 설명하여라.

(a) A가 이길 수 있는 n_0,

(b) B가 이길 수 있는 n_0,

(c) A도 B도 이길 수 없는 n_0,

$\boxed{\text{착안점}}$ 우선 다음의 보조정리를 증명한다. [W를 n_0로부터 시작한 경기에서 A가 이길 수 있는 모든 n_0의 집합이라고 하자. 만일 $\{m, m+1, \cdots, 1990\} \subset W$, $s \leqq 1990$, $\frac{S}{p^r} \geqq m$이면, (p는 소수, $r \in N$, p^r은 s의 최대 인수), $\sqrt{S} \leqq n_0 < m$인 모든 n_0는 W의 원소이다.]

6. 다음 두 성질을 가지는 볼록 1990각형이 존재함을 증명하여라.

(a) 모든 내각의 크기는 같다.

(b) 변의 길이는 $1^2, 2^2, 3^2, \cdots, 1989^2, 1990^2$을 적당한 순서로 나열한 것이다.

$\boxed{\text{착안점}}$ 한 외각의 크기를 α라고 놓고, 구하는 다각형을 $A_0A_1 \cdots A_{1989}$ 라 하고 벡터 $\overrightarrow{A_rA_{r+1}}$을 복소수로 $n_re^{ir\alpha}$, ($r = 0, \cdots, 1989$) 로 한다. 결국 "$\sum_{r=0}^{1989} n_re^{ir\alpha} = 0$을 만족시키는 $1^2, \cdots, 1990^2$의 적당한 순열을 구하여라." 로 귀착된다.