제 32회 국제수학올림피아드
1991년 7월 18일 - 19일, 스웨덴

제 1일 문제

1. $\triangle ABC$의 꼭지점 A, B, C에서의 내각의 이등분선이 대변과 만나는 점을 각각 A', B', C'이라 하자. $\triangle ABC$의 내접원의 중심을 I라 할때,

$$\frac{1}{4} < \frac{\overline{AI} \cdot \overline{BI} \cdot \overline{CI}}{\overline{AA'} \cdot \overline{BB'} \cdot \overline{CC'}} \leqq \frac{8}{27}$$

임을 보여라.

$\boxed{\text{착안점}}$ i) 산술기하평균이용 ii) x, y가 양수일때 $|x - y| < |x_1 + y_1|$이면 $x^3 + y^3 < x_1^3 + y_1^3$임을 이용한다.

2. $n > 6$인 자연수 n에 대하여 n 보다 작으면서 n과 서로 소인 자연수들을 모두 모아 $a_1, a_2, \cdots, a_k$라 하자. 이때

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_k - a_{k-1} > 0$$

이면, n은 소수이거나 2의 자연수 승임을 보여라.

$\boxed{\text{착안점}}$ p 가 m과 서로 소인 최소의 소수이면 a_i는 $a_1 = 1$ 이고 공차 $r = p - 1$인 등차수열이고 $a_k = n - 1$임을 이용한다.

3. 집합 $S = \{1, 2, 3, \cdots, 280\}$의 n개의 원소를 갖는 임의의 부분집합이 서로소(두개씩)인 원소를 적어도 5개 포함하도록 하는 최소의 자연수 n을 구하라.

$\boxed{\text{착안점}}$ $A_1 = \{k \in S \mid 2 \mid k\}$, $A_2 = \{k \in S \mid 3 \mid k\}$, $A_3 = \{k \in S \mid 5 \mid k\}$, $A_4 = \{k \in S \mid 7 \mid k\}$ $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$라고 놓고 $n > |A|$임을 주시하자.

제 2일 문제

4. k개의 변을 가지는 연결된 그래프 G의 각 변에 $1, 2, 3, \cdots, k$의 번호를 모두 붙여 가되, 2개 이상의 변에 속하는 G의 정점에서는 항상 이 정점이 속한 변들에 붙여진 번호들의 공약수가 1을 넘지 않도록 붙일 수 있음을 보여라.

   [그래프는 정점이라고 불리우는 점들과 서로 다른 두 정점을 잇는 변들로 이루어진다. 주어진 두 정점 u, v을 잇는 변은 많아야 하나가 있으며, 있는 경우 이 변을 uv 또는 vu로 나타낸다. 그래프 G가 연결되었다함은 G의 임의의 두 정점 x, y에 대하여 정점 $x = v_0, v_1, v_2, \cdots, v_m = y$ 가 G에 존재하여 $v_0v_1, v_1v_2, \cdots, v_{m-1}v_m$가 모두 그래프 G의 변인 경우이다.]

   $\boxed{\text{착안점}}$ 연속된 두 수는 서로 소임을 이용한다.

5. $\triangle ABC$의 내부에 있는 점 P에 대하여 $\angle PAB, \angle PBC, \angle PCA$중 적어도 하나는 $30°$를 넘지 않음을 보여라.

   $\boxed{\text{착안점}}$ $x = \angle PAB,\ y = \angle PBC,\ z = \angle PCA$라 두고 $\cot x + \cot y + \cot z \geq 3\sqrt{3}$임을 보인다.

6. 실수로 이루어진 무한수열 $x_0, x_1, x_2, \cdots$이 있다. 모든 $i = 1, 2, \cdots$에 대하여

$$|x_i| \leqq C$$

   인 상수 C가 존재하면 이 무한수열을 유계라고 한다. $a > 1$인 상수 a가 주어졌을때, $i \neq j$인 모든 $i, j = 0, 1, 2, \cdots$에 대하여

$$|x_i - x_j|\ |i - j|^a \geqq 1$$

   을 만족시키는 유계인 무한수열 $x_0, x_1, x_2, \cdots$의 예를 만들어라.

   $\boxed{\text{착안점}}$ 자연수 i의 이진수 표현을 $i = b_0 + b_1 \cdot 2 + \cdots + b_k \cdot 2^k$라 할때 $h_i = b_0 + 2^{-a} \cdot b_1 + \cdots + 2^{-ak} \cdot b_k$라 두고 $0 \leqq h_i \leqq \frac{1}{1-2^{-a}}$임을 이용하자.