제 33회 국제수학올림피아드
1992년 7월 15일 - 16일, 러시아

제 1일 문제

1. $(a-1)(b-1)(c-1)$이 $abc-1$의 약수인 모든 정수 a, b, c를 구하라. 단, $1 < a < b < c$.

   착안점 $\frac{abc-1}{(a-1)(b-1)(c-1)} = k$라 하고 먼저 가능한 k값을 구한다.

2. 모든 실수의 집합을 R이라 하자. 임의의 두 실수 x, y에 대하여

$$f(x^2 + f(y)) = (f(x))^2 + y$$

   를 만족시키는 함수 $f : R \longrightarrow R$을 모두 구하라.

   착안점 주어진 관계식을 잘 조사하여 우선 $f(n) = n \quad (n$은 정수)임을 보인다.

3. 공간상에서 어느 네 점도 동일한 평면 상에는 있지 않는 아홉개의 점이 있다. 각 두 점을 변(즉, 선분)으로 연결하여 각 변을 붉은색, 혹은 파란색으로 색칠하든지 혹은 칠하지 않는다고 한다. 꼭 n개의 변들 만이 색칠되었을 때, 색칠하는 방법에 관계없이 색칠된 변들 중에는 세 변이 모두 같은 색으로 칠해진 삼각형이 반드시 하나는 존재할 n의 값중 최소값을 구하라.

   착안점 세 변이 모두 같은 색으로 칠해진 삼각형이 하나도 없을 경우를 생각한다.

제 2일 문제

4. 원 O, 원 O의 접선 l, 접선 l상의 점 M이 같은 평면에 주어져 있다. 이때 다음 조건을 만족시키는 점 P의 자취를 구하라.

   > 적당한 점 Q, R이 직선 l상에 있어서 점 M은 선분 QR의 중점이고, 원 O는 삼각형 PQR의 내접원이다.

$\boxed{\text{착안점}}$ 원 O와 접선 l의 접점과 중심에 대해 대칭인 점과 M을 잇는 직선은 P를 지난다.

5. 삼차원 공간에서, 유한개의 원소로 된 집합 S가 있다. 집합 S의 각 점의 yz-평면 zx-평면, xy-평면에 대한 정사영으로 이루어진 집합을 각각 S_x, S_y, S_z라 하자. 이때

$$|S|^2 \leqq |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|$$

임을 증명하라. 단, 유한집합 A에 대하여 $|A|$는 집합 A의 원소의 개수를 나타낸다.(점의 평면에 대한 정사영이란 그 점에서 그 평면에 내린 수선의 발을 의미한다.)

$\boxed{\text{착안점}}$ S의 원소들이 정사영에서 겹치는 경우를 생각한다.

6. 각각의 양의 정수 n에 대하여 $S(n)$을 다음 조건을 만족시키는 정수 m 가운데서 최대인 정수라고 하자.

$1 \leqq k \leqq m$인 모든 k에 대하여 n^2 을 k개의 0이 아닌 완전제곱수들의 합으로 나타낼 수 있다.

(a) 모든 $n \geqq 4$에 대하여 $S(n) \leqq n^2 - 14$임을 증명하라.

(b) $S(n) = n^2 - 14$인 정수 n을 하나 구하라.

(c) $S(n) = n^2 - 14$인 정수 n이 무한히 많이 있음을 증명하라.

$\boxed{\text{착안점}}$ $S(n)$은 $\sum_{i=1}^{n} i^2 a_i = n^2,\ \sum_{i=1}^{n} a_i = k(k = 1, 2, \cdots, m)$을 만족시키는 음이 아닌 정수해 $a_1, \cdots, a_n$이 존재하는 m의 최대값이다.