제 34회 국제수학올림피아드
1993년 7월 18일 - 19일, 터어키

제 1일 문제

1. n은 $n > 1$인 정수이고, $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$이라고 하자. $f(x)$를 각각의 차수가 1이상이고 정수 계수를 가지는 두 개의 다항식의 곱으로 표시할 수 없음을 증명하여라.

   착안점 $f(x) = g(x)h(x)$라 하고 f, g, h의 상수항을 조사해 본다.

2. 예각 삼각형 ABC의 내부의 점 D가 다음의 조건을 만족시킨다고 하자.

$$\angle ADB = \angle ACD + 90^\circ$$
$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AD} \cdot \overline{BC}$$

   (a) $\frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}$의 값을 구하여라.

   (b) 점 C에서 삼각형 ACD의 외접원에 그은 접선과 삼각형 BCD의 외접원에 그은 접선이 서로 수직임을 증명하여라.

   착안점 (a) D에서 BD에 수선 OE를 긋고 $\overline{DE} = \overline{BD}$ 되게 E를 잡는다.

   (b) 원주각의 성질 이용

3. 무한 바둑판에서 다음과 같은 경기를 한다고 하자.

   먼저, n^2개의 바둑알을 한 칸에 한 개씩, 가로 세로 각각 n개의 인접한 칸으로 이루어진 $n \times n$꼴의 정사각형이 되도록 배열한다. 바둑알은 그 자신의 상하좌우 중에서 어느 한 방향으로 인접한 칸에 바둑알이 놓여 있고 그 다음 칸이 비어 있는 경우에만, 그 빈 칸으로 건너 뛸 수 있다. 그리고 이렇게 건너 뛸 경우 중간에 있던 바둑알은 들어 낸다. 이렇게 진행된 경기가 바둑알이 한개만 남은 상태로 끝날 수 있기 위한 n의 값을 모두 구하여라.

   착안점 한번의 이동에 의해 가로 또는 세로의 이웃한 세칸에서만 변화가 일어남을 생각한다.

제 2일 문제

4. 평면 위의 세 점 P, Q, R에 대하여, 삼각형 PQR의 세 개의 높이 중 최소값을 $m(PQR)$로 표시하자.(단, P, Q, R이 한 직선 위에 있으면 $m(PQR) = 0$이라고 한다.) 평면 위에 점 A, B, C가 주어졌을 때, 같은 평면 위의 임의의 점 X에 대하여 다음을 증명하여라.

$$m(ABC) \le m(ABX) + m(AXC) + m(XBC)$$

$\boxed{\text{착안점}}$ 점의 위치에 따라서 경우를 나누어 생각한다.

5. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ 이라고 하자. 다음의 조건을 만족시키는 함수 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$의 존재 여부를 밝혀라.

   $f(1) = 2$ 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $f(f(n)) = f(n) + n$이고 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $f(n) < f(n+1)$

$\boxed{\text{착안점}}$ $g(x) = \alpha x$라 하고 $g(x)$를 이용해서 $f(x)$을 구해본다.

6. n을 $n > 1$인 정수라고 하자. n개의 전등 $L_0, L_1, \cdots, L_{n-1}$이 원형으로 배열되어 있다. 각 전등은 ON상태이거나 OFF상태이다. 일련의 조작 $S_0, S_1, \cdots,$ $S_i \cdots$를 다음과 같이 실행하자. 조작 S_j는 전등 L_j에 대해서만 실행하는 것으로서 (즉, 다른 전등의 상태에는 아무런 영향을 주지 않음):

   L_{j-1}이 ON상태일 경우, 조작 S_j는 L_j의 상태가 ON이면 OFF로, OFF이면 ON으로 바꾼다.;
   L_{j-1}이 OFF상태일 경우, 조작 S_j는 L_j의 상태를 바꾸지 않고 그대로 둔다.

   전등의 번호는 mod n으로 붙여진 것이다. 즉,

$$L_{-1} = L_{n-1}, \quad L_0 = L_n, \quad L_1 = L_{n+1}, \quad \cdots$$

   처음에는 모든 전등이 ON상태라고 가정할 때, 다음을 증명하여라.

   (a) 적당한 자연수 $M(n)$이 존재하여, $M(n)$번의 조작을 실행하면 모든 전등이 다시 ON상태가 된다.

   (b) n이 2^k의 꼴이면, $n^2 - 1$번의 조작을 실행하면 모든 전등이 다시 ON 상태가 된다.

(c) n이 2^k+1의 꼴이면, n^2-n+1번의 조작을 실행하면 모든 전등이 다시 ON상태가 된다.

$\boxed{\text{착안점}}$ L_j의 상태를 v_j라 표시하고 on일때 $v_j=1$, off 일때 $v_j=0$를 대응시키면 S_j는 v_j를 $v_j+v_{j-1} \pmod 2$로 바꾼다는 사실에 착안한다.