제 35회 국제수학올림피아드
1994년 7월 13일 - 14일, 홍콩

제 1일 문제

1. m, n은 자연수이고 $a_1, a_2, \cdots, a_m$은 집합$\{1, 2, \cdots, n\}$의 서로 다른 원소들로서 다음의 조건을 만족시킨다고 하자. 만약 $a_i + a_j \leqq n \quad (1 \leqq i \leqq j \leqq m)$이면 적당한 $k(1 \leqq k \leqq m)$가 존재하여 $a_i + a_j = a_k$이다. 이때 부등식

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m} \geqq \frac{n+1}{2}$$

을 증명하라.

$\boxed{\text{착안점}}$ 모든 $1 \leqq i \leqq n$에 대해서, $a_i + a_{m+1-i} \geqq n + 1$임을 보이자.

2. ABC는 $AB = AC$인 이등변 삼각형이다.

(i) M은 BC의 중점이고, O는 직선 AM상에 있고 OB가 AB에 수직이 되게 하는 점이다.

(ii) Q는 B, C와 다른 점으로 선분 BC상의 임의의 점이다.

(iii) E는 직선 AB상에 있고 F는 직선 AC상에 있는 점으로, E, Q, F는 서로 다른 점이고 동일 직선 상에 있다.

이때, OQ가 EF에 수직일 필요충분조건은 $QE = QF$임을 증명하라.

$\boxed{\text{착안점}}$ $OEBQ$ 와 $OCFQ$가 원에 내접하는 사각형임을 사용하자.

3. 임의의 자연수 k에 대하여 $f(k)$는 집합 $\{k+1, k+2, \cdots, 2k\}$의 원소들 중 이진법으 표시했을 때 정확히 세 개의 1만을 자리수로 갖는 수들의 개수라 하자. 이때

(a) 각 자연수 m에 대하여 $f(k) = m$을 만족시키는 자연수 k가 적어도 하나 있음을 증명하라.

(b) 위의 방정식을 만족시키는 k가 단 한개만 존재하는 자연수 n을 모두 구하라.

$\boxed{\text{착안점}}$ $g(k) = \{1, 2, \cdots, k\}$ 중에서 2진수 표현법에서 1이 정확히 3개인수들의 개수

$f(k+1) - f(k)$는 $2k+1$ 와 $g(2k+2)$에 따라 달라짐을 이용하자.

제 2일 문제

4. $\dfrac{n^3+1}{mn-1}$이 정수가 되게 하는 자연수들의 순서쌍 (m,n)을 모두 구하라.

   착안점 $mn-1 \mid n^3+1$과 $mn-1 \mid m^3+1$이 동치임을 보이자.

5. S을 -1 보다 큰 실수들의 집합이라 하자. 이때 다음 조건들을 만족시키는 함수 $f : S \to S$를 모두 구하라.

   (i) S에 있는 모든 x, y에 대하여

   $$f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x),$$

   (ii) 함수 $\frac{f(x)}{x}$는 구간 $-1 < x < 0$에서 강증가하고 또한 구간 $0 < x$ 에서도 강증가한다.

   단, 함수 $g(x)$가 한 구간에서 강증가한다는 것은 그 구간 상에 있는 임의의 두 점 $x < y$에 대하여 $g(x) < g(y)$임을 뜻한다.

   착안점 $x = y$ 라고 놓고, $f(u) = u$가 되는 u의 값을 구해본다.

6. 다음의 성질을 만족시키는 자연수들의 한 부분집합 A가 존재함을 보여라. :

   소수들로 이루어진 임의의 무한집합 S에 대하여, 자연수 $k \geqq 2$ 와 S의 서로 다른 k개의 원소들의 곱으로 표시되는 두 자연수 $m \in A$ 과 $n \notin A$이 존재한다.

   착안점 다음과 같은 집합을 생각한다.

$$\begin{aligned} A &= \{2\times 3, 2\times 5, 2\times 7, \cdots\} \cup \{3\times 5\times 7, 3\times 5\times 11, \cdots\} \\ &\quad \cup \{5\times 7\times 11\times 13, \cdots\} \end{aligned}$$