제 36회 국제수학올림피아드
1995년 7월 19일 - 20일, 캐나다

제 *1*일 문제

1. 한 직선상에 서로다른 네 개의 점 A, B, C, D가 차례대로 놓여 있다. 선분 AC, BD를 각각 지름으로 하는 두 원이 만나는 두 점을 X, Y 라고 하고, 직선 XY가 선분 BC와 만나는 점을 Z라고 하자. 또 점 P를 직선 XY 상에 있는 Z가 아닌 임의의 점이라고 하자. 직선 CP가 선분 AC를 지름으로 하는 원과 점 C, M에서 만나고, 직선 BP 가 선분 BD를 지름으로 하는 원과 점 B, N에서 만난다고 할 때, 세 직선 AM, DN, XY가 한 점에서 만남을 보여라.

2. 양의 실수 a, b, c 에 대하여 $abc = 1$ 일 때, 다음을 증명하여라.
$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqq \frac{3}{2}$$

3. 다음의 두 조건을 만족시키는 평면 상의 n개의 점 $A_1, A_2, \cdots, A_n$과 실수 $r_1, r_2, \cdots, r_n$이 존재하도록 하는 정수 $n > 3$을 모두 구하여라.

   (i) $A_1, A_2, \cdots, A_n$의 어떤 세 점도 같은 직선상에 있지않다.

   (ii) 모든 i, j, k $(1 \leqq i < j < k \leqq n)$ 에 대하여 삼각형 $A_iA_jA_k$의 넓이가 $r_i + r_j + r_k$ 와 같다.

제 2일 문제

4. 다음의 조건을 만족시키는 x_0의 최대값을 구하여라. 양의 실수로 이루어진 수열 $x_0, x_1, \cdots, x_{1995}$가 존재하여

   (i) $x_0 = x_{1995}$ 이고,

   (ii) 모든 $i = 1, 2, \cdots, 1995$ 에 대하여 $x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i}$이 성립한다.

5. 볼록육각형 $ABCDEF$ 가 다음의 조건을 만족시킨다고 하자.

$$AB = BC = CD,$$
$$DE = EF = FA, \quad \text{그리고}$$
$$\angle BCD = \angle EFA = 60^\circ$$

육각형의 내부에 있는 두 점 G, H에 대하여, $\angle AGB = \angle DHE = 120^\circ$ 라고 할 때, $AG + GB + GH + DH + HE \geqq CF$임을 보여라.

6. 홀수인 소수 p에 대하여, 집합 $\{1, 2, \cdots, 2p\}$의 부분집합 A 중에서 다음 조건을 만족시키는 것들의 개수를 구하여라. (i) A의 원소의 개수는 p이고, (ii) A의 원소의 합은 p로 나눠 떨어진다.