제 2회 한국 수학 올림피아드
Korean Mathematical Olympiad
(1988)

오전문제

1. 두 자연수 $a = 11,111,111$ 과 $\underbrace{b = 11,111,\cdots,111}_{1\text{이 }1988\text{개}}$의 최대공약수를 구하여라.

2. n은 홀수이고 $a_1, a_2, \cdots, a_n$은 1에서 n까지의 서로 다른 자연수라 할 때

$$(a_1 - 1)(a_2 - 2)\cdots(a_n - n)$$

은 짝수임을 증명하여라.

3. 삼각형 ABC에서

$$\sin A + \sin B + \sin C = 1 + \cos A + \cos B + \cos C$$

가 성립하면 이 삼각형은 직각삼각형임을 증명하여라.

$\boxed{\text{착안점}}$ 삼각함수의 여러 공식을 잘 이용해 정리한 후 직각삼각형임을 이용해 보자.

4. 한변의 길이가 1인 정삼각형 안에 아홉개의 점을 임의로 잡았을 때 그들 중 적어도 세 점은 면적이 $\frac{1}{8}$ 이하인 삼각형의 꼭지점이 됨을 밝혀라. (단, 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않다고 한다.)

$\boxed{\text{착안점}}$ 비둘기집의 원리를 이용한다.

5. 다음 등식이 성립함을 증명하여라.

$${}_nC_1\frac{1}{1} - {}_nC_2\frac{1}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}{}_nC_n\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$\boxed{\text{착안점}}$ $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k {}_nC_k \frac{1}{k+1} = \frac{1}{n+1}$을 이용할 수도 있다.

6. 좌표평면위에 아래 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 $ABCD$가 있다. 점 P가 점 $A(0,1)$을 출발하여 점 $(a,0)$으로 직선운동을 시작하였다. 점 P가 사각형의 어느 한 변에 도달하면 정반사(입사각과 반사각이 같음)를 하여 운동을 계속한다고 할 때 점 P가 네 꼭지점 A,B,C,D중 어느 하나에 도달할 수 있는 a의 값을 모두 구하여라. (단 $0 < a < 1$ 이다.)

그 림 (kmo2-1.pcx)

착안점 반사하는 직선의 경로를 펴면, 결국은 좌표평면위에 한 직선이 되고, 꼭지점을 지나는 것은 이 직선이 격자점을 지날 때임을 이용한다.

7. 원 O의 둘레 위에 점 A,B를 잡고, $\triangle OAB$가 정삼각형이 되도록 하였다. 원의 임의의 지름 XY를 잡고 직선 XA, YB의 교점을 P라 할 때, 지름 XY가 움직이면 점 P는 어떤 도형 위를 움직이는가?

그 림 (kmo2-2.pcx)

착안점 P, (P), A, B는 한 원 주위에 있음을 확인한다.

오후문제

1. n 과 d는 1보다 큰 자연수이다. 다항식

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n) \qquad (\text{단, } \alpha_i\text{는 복소수})$$

가 w^d인 모든 복소수 w에 대하여

$$f(wx) = f(x)$$

를 만족시킨다. 이때, $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$의 값을 구하여라.

$\boxed{\text{착안점}}$ 직접 $f(wx)$와 $f(x)$의 계수를 비교해 보면, f가 d의 배수차항만 갖는다는 것을 알 수 있다.

2. n이 자연수이고 α가 실수일 때

$$[\alpha] + \left[\alpha + \frac{1}{n}\right] + \cdots + \left[\alpha + \frac{n-1}{n}\right] = [n\alpha]$$

가 성립함을 증명하여라. (단 $[\alpha]$는 α를 넘지 않는 최대의 정수값을 나타낸다.)

$\boxed{\text{착안점}}$ $\alpha - [\alpha]$가 $[0, 1)$을 n등분했을때 어느 구간에 있다고 가정한 후 직접 계산해 보자.

3. 수열 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$이 $m \geqq 2$인 모든 자연수 m에 대하여

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} a_m & a_{m-1} \\ a_{m-1} & a_{m-2} \end{pmatrix}$$

인 관계식을 만족시킨다. 이때, 음이 아닌 모든 정수 n에 대하여 $a_{5n+1} \geqq 10^n$이 성립함을 증명하여라.

$\boxed{\text{착안점}}$ 먼저 a_n의 점화식을 구해본 후, $a_{5n+1} \geqq 10a_{5(n-1)+1}$임을 보자.

4. a, b, c 세 문자만을 사용하여 단어를 만들려고 한다. 문자 a 와 b는 같은 것끼리 인접하여 배열할 수 없다고 할 때, 문자의 개수가 n인 모든 단어의 갯수를 구하여라.

$\boxed{\text{착안점}}$ c에 관해 경우를 구별해서 점화식을 만들어 보자.

5. $\overline{CB} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$, $\angle C = 90°$인 직각삼각형 ABC에서, 꼭지점 C에서 빗변 AB에 내린 수선의 발을 H라 한다. $\triangle ABC, \triangle CAH, \triangle BCH$의 내접원의 중심을 각각 O, O_1, O_2라 하고 내접원의 반지름의 길이를 각각 r, r_1, r_2라 한다. $\overline{CH} = h$라 할 때 다음 물음에 답하여라. (1) $r + r_1 + r_2 = h$ 임을 증명하여라. (2) $\triangle OO_1O_2$의 넓이를 r과 c로 나타내어라.

$\boxed{\text{착안점}}$ 삼각형의 닮음을 이용해 $r = \frac{ab}{a+b+c}$임을 보이자.