제 *3*회 한국 수학 올림피아드

Korean Mathematical Olympiad

1989

오전문제

1. 원탁에 10명의 손님자리가 명찰과 함께 놓여있다. 10명의 손님이 명찰을 확인하지 않고 아무렇게나 앉았더니 제자리에 앉은 손님이 한 사람도 없었다. 이 때, 명찰이 놓인 원탁을 적당히 회전시키면 적어도 2명의 손님이 제자리에 앉게 됨을 증명하여라.

2. 각 C가 직각인 직각삼각형 ABC의 변 AC위에 점 P가 있다. 삼각형 PAB, PBC의 내접원이 합동(같은 크기의 원)일 때 선분 PC의 길이 x를 변 BC, CA, AB의 길이 a, b, c로 나타내어라.

   $\boxed{\text{착안점}}$ r을 내접원의 반지름이라 할 때 $\frac{a+b+c}{2}r = S$임을 확인하고 a, b, c, x, y에 관한 식을 구해보자.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2n+mn^2+mn} = 2$임을 증명하여라.

   $\boxed{\text{착안점}}$ 부분분수를 이용하여 m과 n이 ∞로 갈 때 사라지지 않는 항과 사라지는 항들을 잘 묶어보자.

4. n명의 선수가 리그제도(모든 선수와 한번씩 경기를 함)로 씨름 경기를 하였다. 비기는 경우는 없다고 할 때 다음 물음에 답하여라. (1) 경기가 모두 끝난 후 앞사람이 바로 뒷사람을 이긴 순서로 한 줄로 나열할 수 있음을 밝혀라. (2) k번째 선수가 이긴 경기의 수를 w_k, 진 경기의 수를 l_k라 하면 $\sum\limits_{k=1}^{n} w_k^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} l_k^2$임을 증명하여라.

   $\boxed{\text{착안점}}$ (1)번은 Induction을 이용하면 쉽고 (2)번은 여러 일반적인 등식을 먼저 구해본다.

5. n을 10진법으로 나타낸 양의 정수라 한다. n의 각 자리수들의 곱이 $n^2 - 10n - 22$인 모든 n을 구하여라.

   $\boxed{\text{착안점}}$ 먼저 n이 두자리수임을 보인다.

오후문제

1. 양의 정수 n, 실수 a, b에 대하여 $\sum_{i=0}^{n} x_i = a$, $\sum_{i=0}^{n} x_i^2 = b$를 만족시키는 x_0의 범위를 구하여라. (단 $x_0, x_1, \cdots, x_n$은 실수이다.)

   $\boxed{\text{착안점}}$ x_0를 x_i들의 식으로 정리한 후 코시-슈발쯔부등식을 이용한다.

2. 점 P를 평면 위의 한 점이라고 한다. 평면위에 유한개의 선분이 아무렇게나 그려져 있으며, 그 선분들의 길이의 합이 1989이다. 이 때, 어떠한 선분과도 만나지 않으며, 점 P로부터의 거리가 704보다 작은 직선이 존재함을 증명하여라.

   $\boxed{\text{착안점}}$ P를 원점으로 한 임의의 좌표축에 선분들을 정사영시켜보자.

3. 함수 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$($\mathbb{N}$은 자연수의 집합)이 다음 조건 (i) (ii) (iii) 을 만족시키고 있다.

   (i) f는 단조 증가 함수 (ii) 모든 $m, n \in \mathbb{N}$에 대하여 $f(mn) = f(m)f(n)$

   (iii) $m \neq n$이고 $m^n = n^m$이면 $f(m) = n$이거나 또는 $f(n) = m$. 이때 $f(30)$을 구하여라.

4. a, b가 완전제곱수가 아닌 정수일 때, $x^2 - ay^2 - bz^2 + abw^2 = 0$ 이 전부는 0이 아닌 정수해 (x_0, y_0, z_0, w_0)을 가질 때 $x^2 - ay^2 - bz^2 = 0$ 도 전부는 0 이 아닌 정수해를 가짐을 증명하여라.

   $\boxed{\text{착안점}}$ 첫식을 두번째 식의 꼴로 변형시켜 본다.

5. $\triangle ABC$ 에서 $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$이다. 변 BC위에 점 P를 잡을 때 $b^2\overline{BP} + c^2\overline{CP} = a(\overline{AP}^2 + \overline{BP} \cdot \overline{CP})$임을 증명하여라.

   $\boxed{\text{착안점}}$ $\angle APB$와 $\angle APC$에 대한 코사인 법칙을 이용하자.